Universität Bielefeld Fakultät für Physik	TP: Quantenmechanik SS 2026	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 5: Abgabe 12.05.2026

5.1 Hermitesche Operatoren

a. Geben Sie die Definition für einen hermiteschen Operator an und benennen Sie die auftretenden Größen.

b. Beweisen Sie, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell sind. Betrachten Sie dazu die Differenz aus

$$\langle\, a_m \,|\, \underset{\sim}{A} \,|\, a_n \,\rangle = a_n \langle\, a_m \,|\, a_n \,\rangle \tag{1}$$

und

$$\langle\, a_m \,|\, \underset{\sim}{A}^\dagger \,|\, a_n \,\rangle = a_m^* \langle\, a_m \,|\, a_n \,\rangle \;. \tag{2}$$

Die Vektoren $|\, a_n \,\rangle$ seien die Eigenzustände von $\underset{\sim}{A}$.

c. Beweisen Sie, dass die Eigenvektoren eines hermiteschen Operators, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, orthogonal sind. Dazu können Sie die schon berechnete Differenz benutzen.

d. Geben Sie einen physikalischen Grund an, warum es konsistent ist, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell sind.

5.2 Erwartungswert hermitescher und antihermitescher Operatoren

a. Beweisen Sie, dass der Erwartungswert eines hermiteschen Operators reell ist.

b. Beweisen Sie, dass der Erwartungswert eines antihermiteschen Operators imaginär ist.

5.3 Spin $s = 1$

Leiten Sie für einen Spin $s = 1$ die Darstellungen der drei Spinkomponenten $\underset{\sim}{s}_x, \underset{\sim}{s}_y, \underset{\sim}{s}_z$ in der Eigenbasis von $\underset{\sim}{s}_z$ her. Verwenden Sie dabei

- die Eigenwertgleichungen für den Spin,
- den Zusammenhang zwischen $\underset{\sim}{s}_x, \underset{\sim}{s}_y$ und $\underset{\sim}{s}^+, \underset{\sim}{s}^-$,
- sowie

$$\underset{\sim}{s}^\pm \,|\, s\ m \,\rangle \quad = \quad \hbar \sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1)}\,|\, s\ m \pm 1 \,\rangle \;. \tag{3}$$

5.4 Ofen beim Stern-Gerlach-Versuch

Wie beschreibt man eigentlich den Zustand der Silberatome, wenn sie aus dem Ofen austreten? Wäre es korrekt, den Zustand durch einen Zustandsvektor wie z.B.

$$|\,\phi_o\,\rangle \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\,s_z+\,\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\,s_z-\,\rangle \tag{4}$$

zu beschreiben? Begründen Sie.
In der Vorlesung über Quantenstatistik werden Sie lernen, dass man den Zustand der austretenden Silberatome durch einen statistischen Operator

$$\underset{\sim}{R} \quad = \quad \frac{1}{2}\,(\,|\,s_z+\,\rangle\langle\,s_z+\,| \;+\; |\,s_z-\,\rangle\langle\,s_z-\,|\,) = \sum_n p_n \underset{\sim}{P}_n \tag{5}$$

beschreibt. Dieser ist eine Summe aus Wahrscheinlichkeiten p_n und ihren zugehörigen Projektoren $\underset{\sim}{P}_n$.
Überprüfen Sie, ob diese Beschreibung die richtigen Ergebnisse für die folgenden beiden Messergebnisse liefert:

$$p(s_z+) \quad = \quad \langle\,s_z+\,|\,\underset{\sim}{R}\,|\,s_z+\,\rangle \tag{6}$$

$$p(s_x+) \quad = \quad \langle\,s_x+\,|\,\underset{\sim}{R}\,|\,s_x+\,\rangle\;. \tag{7}$$