Universität Bielefeld	TP: Quantenmechanik	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	SS 2026	jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 4: Abgabe 04.05.2026

4.1 Eigenwerte und Eigenvektoren von Spinoperatoren

Der Operator $\underset{\sim}{s}_z$ hat für ein Teilchen mit Spin $s = 1/2$ die Eigenzustände $\{\,|\,s_z\,+\rangle,\ |\,s_z\,-\rangle\}$. Die Basiszustände bilden eine Orthonormalbasis und seien stets in dieser Reihenfolge durchnummeriert. Alle Ergebnisse dieser Aufgabe können Sie anhand Ihrer Mitschrift überprüfen.

a. Der Operator $\underset{\sim}{s}_x$ hat bezüglich dieser Basis die Darstellung

$$\underset{\sim}{s}_x \equiv \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{1}$$

Schreiben Sie $\underset{\sim}{s}_x$ als Operator unter Zuhilfenahme des äußeren Produkts auf.

b. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix (1). Stellen Sie die Eigenvektoren als Linearkombination der Eigenvektoren zu $\underset{\sim}{s}_z$ dar.

c. Stellen Sie die Eigenvektoren von $\underset{\sim}{s}_z$ als Linearkombination der Eigenvektoren von $\underset{\sim}{s}_x$ (1) dar.

d. Die Vertauschungsrelationen für Spins lautet

$$\left[\underset{\sim}{s}_x, \underset{\sim}{s}_y\right] = i\,\hbar\,\underset{\sim}{s}_z \ . \tag{2}$$

In diesem Ausdruck können die Indizes zyklisch vertauscht werden, d.h. $x \to y \to z \to x$. Da Sie die Darstellungen von $\underset{\sim}{s}_z$ und $\underset{\sim}{s}_x$ kennen, können Sie jetzt in einer Basis Ihrer Wahl (ich empfehle die Eigenbasis zu $\underset{\sim}{s}_z$) die Darstellung von $\underset{\sim}{s}_y$ berechnen.

Schreiben Sie außerdem $\underset{\sim}{s}_y$ als Operator unter Zuhilfenahme des äußeren Produkts der Eigenvektoren zu $\underset{\sim}{s}_z$ auf.

e. Zeigen Sie darstellungsfrei unter Benutzung der Kommutatorrelation (2), dass $\underset{\sim}{\vec{s}}^2$ mit allen drei Komponenten $\underset{\sim}{s}_x$, $\underset{\sim}{s}_y$ und $\underset{\sim}{s}_z$ des Spinvektoroperators vertauscht.

f. Begründen Sie, warum es gereicht hätte, dies nur für eine Komponente zu zeigen.

4.2 Erwartungswerte und Messwahrscheinlichkeiten für Spinkomponenten

Durch eine spezielle Stern-Gerlach-Apparatur sei das System im Zustand

$$| \alpha \rangle \quad = \quad 0.6 \, | \, s_z \, + \rangle + 0.8 \, | \, s_z \, - \rangle \tag{3}$$

präpariert.

a. Wie lautet der Erwartungswert des Operators $\underset{\sim}{s}_z$ bezüglich $| \alpha \rangle$? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten bei einer Messung von $\underset{\sim}{s}_z$ die Komponenten „spin up“ und „spin down“ auf?

b. Wie lautet der Erwartungswert des Operators $\underset{\sim}{s}_y$ bezüglich $| \alpha \rangle$? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten bei einer Messung von $\underset{\sim}{s}_y$ die Komponenten „spin up“ und „spin down“ auf?

c. Konstruieren Sie eine Stern-Gerlach-Apparatur, mit der der Zustand $| \alpha \rangle$ präpariert werden kann. Begründen Sie.

4.3 Verkanteter Stern-Gerlach-Versuch

Ein etwas schusseliger Experimentator (Männer! Musste wahrscheinlich schnell gehen wegen der Champions-League!) orientiert seinen Stern-Gerlach-Versuch statt in z-Richtung entlang $\theta = 30^o, \phi = 30^o$, wobei θ und ϕ die üblichen Kugelkoordinaten sind, d.h. θ misst die Auslenkung von der positiven z-Achse und ϕ den Drehwinkel in der $x-y$-Ebene entgegen dem Uhrzeigersinn. Der Eingangsstrahl sei im Zustand $| \, s_z \, + \rangle$ präpariert.
Welche Eigenwerte misst der Experimentator und mit welchen Wahrscheinlichkeiten? Und wie ging das Spiel Bayern gegen Real am 15. April 2026 aus?