Universität Bielefeld	Vertiefung der klassischen	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	Mechanik und Elektrodynamik	jschnack@uni-bielefeld.de
Wintersemester	2024	6193, E5-120

Aufgabenblatt 13

13.1 Wechselwirkung zwischen Ladungsverteilungen

In der Vorlesung wurde die Feldenergie des elektromagnetischen Feldes abgeleitet. Wir konzentrieren uns im Folgenden auf den elektrostatischen Anteil. Hier galt

$$W_{\mathrm{el}} \;=\; \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}r^3 \int \mathrm{d}r'^3 \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\ . \tag{1}$$

Wir nehmen jetzt an, dass die Ladungsdichte ρ sich aus zwei räumlich getrennten Anteilen zusammensetzt. Die Wechselwirkungsenergie der beiden Anteile ρ und ρ_{extern} lässt sich dann wie in dem folgenden Auszug aus Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3* schreiben und für räumlich nur wenig ausgedehnte ρ entwickeln.

a. Ein Dipol befinde sich am Ort $\vec{r}$. Er habe das Moment $\vec{p}$. Im Koordinatenursprung, der weit genug vom Dipol entfernt sei, befinde sich eine Punktladung q. Berechnen Sie die potentielle Energie des Dipols (entspricht Wechselwirkungsenergie des Dipolmoments mit Feld der Punktladung) und berechnen Sie die Kraft, die auf den Dipol einwirkt (5 P.).

b. Diskutieren Sie weiterhin, wie die Wechselwirkungsenergie zweier Dipole von ihrer relativen Ausrichtung sowie der Ausrichtung bezüglich des Abstandsvektors abhängt. Machen Sie dazu Skizzen (5 P.).

Der Wechselwirkungsanteil lautet damit:

$$W_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint d^3r\, d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho_{ex}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int d^3r\, \rho(\mathbf{r})\varphi_{ex}(\mathbf{r}). \tag{2.103}$$

φ_{ex} ist das von ρ_{ex} erzeugte skalare Potential. Wir nehmen an, daß das $\rho \neq 0$-Gebiet so klein ist, daß dort φ_{ex} ungefähr als konstant angesehen werden kann:

$$\begin{aligned}\varphi_{ex}(\mathbf{r}) &= \varphi_{ex}(0) + (\mathbf{r}\cdot\nabla)\varphi_{ex}(0) + \frac{1}{2}(\mathbf{r}\cdot\nabla)^2\varphi_{ex}(0) + \ldots = \\ &= \varphi_{ex}(0) - \mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i x_j \left.\frac{\partial^2\varphi_{ex}}{\partial x_j \partial x_i}\right|_{r=0} + \ldots\end{aligned}$$

Innerhalb des $\rho \neq 0$-Gebietes liegen keine das Feld $\mathbf{E}$ erzeugende Ladungen. Deswegen gilt dort $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$. Das heißt:

$$0 = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} E_i = -\sum_i \frac{\partial^2\varphi_{ex}}{\partial x_i^2} = -\sum_{i,j} \delta_{ij} \frac{\partial^2\varphi_{ex}}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Einen solchen Term können wir oben also getrost addieren:

$$\varphi_{ex}(\mathbf{r}) = \varphi_{ex}(0) - \mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_{i,j}(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})\frac{\partial E_i(0)}{\partial x_j} + \ldots$$

Dies wird in (2.103) eingesetzt:

$$W_1 = q\,\varphi_{ex}(0) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_{i,j} Q_{ij}\frac{\partial E_i(0)}{\partial x_j} + \ldots \tag{2.104}$$

Die Ladung (Monopolmoment) wechselwirkt mit dem externen Potential, das Dipolmoment mit dem externen Feld $\mathbf{E}$ und das Quadrupolmoment mit dessen Ortsableitungen.

Wir können diesen Ausdruck ausnutzen, um die Wechselwirkung zwischen zwei Dipolen zu bestimmen. Wir setzen dazu in den zweiten Summanden das Dipolfeld (2.73) eines zweiten Dipols ein:

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2}{r_{12}^3} - 3\frac{(\mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{p}_1)(\mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{p}_2)}{r_{12}^5}\right] \tag{2.105}$$

($\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$). Diese wichtige Beziehung zeigt, daß die Dipol-Dipol-Wechselwirkung sowohl anziehend wie abstoßend sein kann, je nach relativer Orientierung der beiden Dipole.

13.2 Lorentzinvarianz der Wellengleichung

Zeigen Sie, daß die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - \Delta\psi \quad = \quad 0 \tag{2}$$

invariant unter Lorentz-Transformation ist. Nehmen Sie zur Vereinfachung an, daß die Welle nur von der Zeit und derjenigen Raumkomponente abhängt, entlang der sich das zweite Koordinatensystem bewegt, z.B. x.

13.3 Verteilung gleicher Ladungen auf einer Kugeloberfläche

N gleiche Ladungen q können sich auf einer Kugeloberfläche frei bewegen. Ihre Wechselwirkung sei die von Punktladungen im Vakuum.
Bestimmen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl – Sie dürfen auch eine erfinden – die Konfigurationen minimaler Energie für $N = 2, 3, 4, \ldots$. Wie weit kommen Sie? Für einige N könnte man über Lösungen spekulieren, z.B. $N = 8$ oder $N = 12$. Warum?