Universität Bielefeld	Vertiefung der klassischen	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	Mechanik und Elektrodynamik	jschnack@uni-bielefeld.de
Wintersemester	2024	6193, E5-120

Aufgabenblatt 10

10.1 Mathematische Fingerübungen

Die folgenden Relationen sind oft wichtige Hilfsmittel.

a. Zeigen Sie (2 P.)

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} f(r) = \frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r} f(r) \ . \tag{1}$$

b. Zeigen Sie

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2} \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}) \ . \tag{2}$$

Gehen Sie dabei so vor, dass Sie zum einen zeigen, dass das Volumenintegral von $\Delta\frac{1}{r}$ gleich -4π ist und dass zum anderen $\Delta\frac{1}{r}$ gleich Null ist für $r \neq 0$ (3 P.).

c. Es sei

$$f(x, a) = g(x - a) \ . \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass (1 P.)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, a) = -\frac{\partial}{\partial a} f(x, a) \ . \tag{4}$$

d. Geben Sie die Taylorreihe für die Entwicklung einer beliebigen Funktion $f(x)$ um $x = x_0$ an (1 P.).

e. Es sei jetzt wieder

$$f(x, a) = g(x - a) \ . \tag{5}$$

Geben Sie die Taylorreihe für die Entwicklung von $f(x, a)$ um $a = 0$ an. Schreiben Sie am Ende die Ableitungen nach a in Ableitungen nach x um (3 P.).

10.2 Mathematische Fingerübungen III

Zeigen Sie mit ein paar Zwischenschritten, was bei den folgenden Relationen herauskommt.

a.

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{1}{r} \, . \tag{6}$$

b.

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{1}{r^3} \, . \tag{7}$$

c.

$$\vec{r}\,' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{1}{r} \, . \tag{8}$$

d.

$$\left(\vec{r}\,' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right) \left(\vec{r}\,' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right) \frac{1}{r} \, . \tag{9}$$

10.3 Homogen geladene Kugel

Eine Kugel vom Radius R sei homogen geladen, d.h., die Ladungsdichte ist im Inneren konstant. Die Gesamtladung betrage Q. Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass der Ursprung im Mittelpunkt der Kugel liegt.

a. Verwenden Sie einschlägige Bücher (0 P.).

b. Berechnen Sie das elektrostatische Potential der Kugel. Stellen Sie die radiale Abhängigkeit graphisch dar.
Hinweis: Im Integral kommen zwei Koordinaten $\vec{r}$ für $\phi(\vec{r})$ und $\vec{r}\,'$ für $\rho(\vec{r}\,')$ vor. Arbeiten Sie in Kugelkoordinaten und legen Sie die z-Achse entlang $\vec{r}$. Es ist günstig, wenn Sie nicht über $\mathrm{d}\vartheta$, sondern über $\mathrm{d}\cos(\vartheta)$ integrieren. Unterscheiden Sie weiterhin zwischen Innen- und Außenbereich und führen Sie eine Fallunterscheidung bezüglich des Betrages durch (8 P.).

c. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke und stellen Sie deren Betrag als Funktion des Abstandes graphisch dar (2 P.).