Universität Bielefeld	Vertiefung der klassischen	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	Mechanik und Elektrodynamik	jschnack@uni-bielefeld.de
Wintersemester	2024	6193, E5-120

Aufgabenblatt 8

8.1 Abstand von Lichtsignalen

Ein Raumschiff fliegt mit der Geschwindigkeit $v = 0.866\ c$ von der Erde weg. Im zeitlichen Abstand von $\Delta t' = 4$ s (Raumschiffzeit) emittiert es zwei Lichtsignale zur Erde.

a. Mit welchem Zeitunterschied Δt (Erdzeit) treffen die zwei Lichtsignale auf der Erde ein?

b. Welchen Weg, von der Erde aus gemessen, hat das Raumschiff zwischen der Emission der beiden Signale zurückgelegt?

8.2 Radioaktiver Zerfall

Wir betrachten den radioaktiven Zerfall einer Substanz mit der Halbwertzeit von 60 s. Der Begriff Halbwertzeit bezieht sich stets auf das Ruhesystem der zerfallenden Substanz. Ein Beobachter fliege mit einer Geschwindigkeit $v = 0.9\ c$ an der Substanz vorbei.

a. Nach welcher Zeit ist für ihn die Hälfte der Substanz zerfallen?

b. Welchen Weg hat die Substanz dabei in seinem Bezugssystem zurückgelegt?

$\Rightarrow$

8.3 Zusatzaufgabe: Gekoppelte harmonische Oszillatoren III

N identische harmonische Oszillatoren der Masse m seien in einer Kette mit der Kreisfrequenz ω aneinander harmonisch gekoppelt. Die Schwingungen erfolgen alle entlang einer Geraden, d.h. in einer Dimension. Um schon mit einer kleinen Zahl harmonischer Oszillatoren eine unendliche Kette simulieren zu könne, nutzt man sogenannte periodische Randbedingungen, d.h. der letzte Oszillator hängt nicht an der Wand, sondern wechselwirkt wieder mit dem ersten, der auch nicht an der Wand hängt, über eine Feder. Man kann sich das als Ring vorstellen.

a. Erstellen Sie eine Skizze des Aufbaus. Benennen Sie die Auslenkungen der Massen m aus ihren Ruhelagen mit $q_1 \dots q_N$. Stellen Sie die gekoppelten Bewegungsgleichungen für $q_1 \dots q_N$ auf.

b. Diese Bewegungsgleichungen kann man vektoriell schreiben. Führen Sie dazu den Vektor $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ ein. Auf der rechten Seite taucht eine Matrix auf.

c. Dieses physikalische Problem hat eine wundervolle analytische Lösung. Dazu betrachtet man einen Operator T, der alle Oszillatoren um einen Platz verrückt, d.h. $q_1 \Rightarrow q_2$, $q_2 \Rightarrow q_3$, $\dots$, $q_N \Rightarrow q_1$. Wie sieht der Verschiebeoperator T als Matrix aus?

d. Für den Verschiebeoperator gilt $T^N = 1$. Daraus ergibt sich, dass seine Eigenwerte die komplexen Zahlen

$$z_k = \exp\left\{-i\frac{2\pi k}{N}\right\} \ , \qquad k = 0, \dots, N-1 \tag{1}$$

sind. k ist hier ein Index, nicht die Federkonstante. Die Vektoren

$$\vec{Q}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\nu=0}^{N-1} \left(e^{i\frac{2\pi\, k}{N}}\ T\right)^{\nu} \vec{q} \tag{2}$$

sind nicht nur Eigenvektoren von T, sondern lösen auch die Differentialgleichung! Zeigen Sie dies für $N = 2$ und $N = 3$ und bestimmen Sie die Eigenwerte $\omega(k)$.

Wenn Sie es allgemein zeigen können, gibt es von mir eine Tüte Gummibärchen!