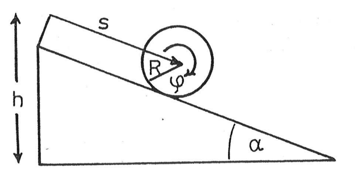
Universität Bielefeld	Vertiefung der klassischen	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	Mechanik und Elektrodynamik	jschnack@uni-bielefeld.de
Wintersemester	2024	6193, E5-120

Aufgabenblatt 7

7.1 Abrollender Vollzylinder

Ein Vollzylinder soll auf einer schiefen Ebene ohne Schlupf abrollen. Diese Bewegung kann man einerseits unter Nutzung holonomer Zwangsbedingungen mit Lagrange-Parameter und andererseits durch Reduktion auf eine generalisierte Koordinate beschreiben.



a. Stellen Sie die Lagrangefunktion in den Koordinaten s und ϕ sowie den zugehörigen Geschwindigkeiten auf. Dazu benötigen Sie die Rotationsenergie eines Zylinders. Suchen Sie sich das mal raus. Eventuell hatten Sie das auch in der Experimentalphysik behandelt (1 P.).

b. Formulieren Sie die Zwangsbedingung (1 P.).

c. Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen mit der Zwangsbedingung auf (1 P.).

d. Differenzieren Sie die Zwangsbedingung so, dass Sie $\ddot{s}$ durch $\ddot{\phi}$ ausdrücken, damit eliminieren Sie $\ddot{\phi}$ in der Differentialgleichung für ϕ. Die erhaltene Relation zwischen $\ddot{s}$ und dem Lagrange-Parameter λ setzen Sie in die DGL für s ein. Das gibt jetzt λ als Funktion von m, g und α (2 P.).

e. Berechnen Sie die Zwangskräfte (1 P.). Wie könnte man diese interpretieren (+1 P.)?

f. Wie lauten die endgültigen Bewegungsgleichungen für s und ϕ? Wie lauten die Lösungen $s(t)$ und $\phi(t)$ (2 P.)?

g. Lösen Sie jetzt das Problem noch einmal, aber ohne Zwangskräfte, d.h. indem Sie eine Koordinate eliminieren (2 P.).

7.2 Lösung des harmonischen Oszillators mittels Poisson-Klammern

Die Poisson-Klammern zweier klassischer Observabler sind wie folgt definiert

$$\{f, g\} \quad := \quad \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \ . \tag{1}$$

Dabei sind q_i die generalisierten Koordinaten und p_i die generalisierten Impulse.
Mit Hilfe der Poisson-Klammern kann man die Zeitentwicklung des harmonischen Oszillators bestimmen. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

a. Stellen Sie die Hamilton-Funktion eines eindimensionalen harmonischen Oszillators mit der Frequenz ω auf.

b. Stellen Sie zum Vergleich erst einmal die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf.

c. Nehmen Sie nun an, Sie kennten die Funktion $x(t)$. Entwickeln Sie diese Funktion in eine Taylor-Reihe und bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten über Poisson-Klammern mit der Hamiltonfunktion.

d. Führen Sie die gleiche Prozedur für $p(t)$ durch.

e. Vereinfachen Sie die entstandenen Reihen.

f. Stellen Sie die Phasenraumkurve dar, die sich ergibt, wenn der Oszillator die Energie E hat. Kann man die Darstellung durch geschickte Koordinatenwahl vereinfachen?

7.3 Zusatzaufgabe: Hamilton-Funktion und klassische Zustandssumme

Die Hamilton-Funktion eines klassischen Systems ist der Ausgangspunkt zur Berechnung der statistischen Eigenschaften dieses Systems im thermodynamischen Gleichgewicht. Dabei lautet die kanonische Zustandssumme für ein System, das mittels einer Koordinate und eines Impulses beschrieben wird

$$Z(\beta) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \, \mathrm{d}q \; \exp\{-\beta H(p,q)\} \ . \tag{2}$$

Für höherdimensionale Systeme muss das Integral entsprechend erweitert werden. $\beta = 1/(k_B T)$ ist die inverse Temperatur.
Die innere Energie und andere statistische Mittel berechnen sich dann wie folgt

$$U(\beta) \quad = \quad \frac{1}{Z(\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \, \mathrm{d}q \; H(p,q) \; \exp\{-\beta H(p,q)\} \ . \tag{3}$$

Für die innere Energie gilt auch

$$U(\beta) \quad = \quad -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln\{Z(\beta)\} \ . \tag{4}$$

a. Stellen Sie die Hamilton-Funktion für einen eindimensionalen harmonischen Oszillator der Frequenz ω auf. Bestimmen Sie für diesen Oszillator die Zustandssumme, die innere Energie und die Wärmekapazität $C = \partial U/\partial T$.

b. Erinnern Sie sich an den Gleichverteilungssatz? Was sagt der Gleichverteilungssatz aus? Vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis.

c. Nehmen Sie jetzt an, daß das Potential nicht quadratisch in x ist, sondern proportional zu x^4. Bestimmen Sie Zustandssumme, innere Energie und Wärmekapazität für diesen Fall. Mit welcher leider sehr verbreiteten Formulierung des Gleichverteilungssatzes würden Sie hier nicht weiterkommen?