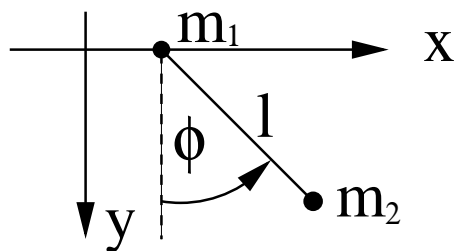


Universität Bielefeld Fakultät für Physik Wintersemester	Vertiefung der klassischen Mechanik und Elektrodynamik 2024	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de 6193, E5-120
--	---	---

Aufgabenblatt 5

5.1 Schwingende Hantel



Eine Hantel bestehe aus den beiden Massen m_1 und m_2 im Abstand l . Die Masse m_1 der Hantel kann sich reibungsfrei entlang einer horizontalen Geraden bewegen. Auf beide Massen wirke die Schwerkraft in y -Richtung.

- Stellen Sie zuerst die Lagrangefunktion in günstigen Koordinaten auf. Wieviele Koordinaten braucht man zur Definition der Lagrangefunktion (2 P.)?
- Gibt es in Ihrer Formulierung der Lagrange-Funktion eine zyklische Koordinate? Wie lautet die zugehörige Erhaltungsgröße? Wenn Sie keine zyklische Koordinate finden, versuchen Sie es doch mit „günstigeren“ Koordinaten (2 P.).
- Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für die zyklische Koordinate auf. Diese Differentialgleichung können Sie ohne Näherung lösen. Wählen Sie als Anfangsbedingungen $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $\phi(0) = \phi_0$ und $\dot{\phi}(0) = 0$ (4 P.).
- Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für die andere Koordinate auf. Diese ist eine gekoppelte DGL, die auch die zweite Zeitableitung der zyklischen Koordinate enthält (2 P.).
- Zusatzaufgabe:** Lösen Sie die zweite Euler-Lagrange-Gleichung in der Näherung kleiner Winkel, d.h. $\cos(\phi) \approx 1$ und $\sin(\phi) \approx \phi$. Führen Sie dazu bei der ersten Lösung zuerst die Näherung kleiner Winkel durch und differenzieren Sie die erste Lösung zweimal. Ersetzen Sie damit die zyklische Koordinate in der zweiten DGL. Das können Sie jetzt ohne Probleme lösen (5 Zusatzpunkte).

5.2 Lagrangefunktion und Euler-Lagrange-Gleichung

- a. Geben Sie die Lagrangefunktion eines isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillators und die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen in kartesischen Koordinaten an. Leiten Sie die zugehörigen Bewegungsgleichungen (Differentialgleichungen) ab.
- b. Geben Sie die Lagrangefunktion eines isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillators und die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen in Kugelkoordinaten an. Gibt es eine zyklische Koordinate? Wenn ja, geben Sie diese an. Leiten Sie die zugehörigen Bewegungsgleichungen (Differentialgleichungen) ab.
- c. Geben Sie die Lagrangefunktion und die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen für die Bewegung einer Masse im homogenen Schwerfeld an der Erdoberfläche an. Leiten Sie die zugehörigen Bewegungsgleichungen (Differentialgleichungen) ab.

5.3 Gekoppelte harmonische Oszillatoren I

Zwei identische harmonische Oszillatoren (ohne Reibung und Antrieb) mit der Federkonstanten k und Massen m seien harmonisch gekoppelt, d.h. mit einer weiteren Feder der Stärke k_{12} verbunden. Die Schwingungen erfolgen alle entlang einer Geraden, d.h. in einer Dimension.

- a. Erstellen Sie eine Skizze des Aufbaus. Benennen Sie die Auslenkungen der beiden identischen Massen m aus ihren Ruhelagen mit q_1 und q_2 . Stellen Sie die gekoppelten Bewegungsgleichungen für q_1 und q_2 auf.
- b. Die Bewegungsgleichungen können durch Superpositionen von $q_1(t)$ und $q_2(t)$ entkoppelt werden. Stellen Sie zu diesem Zweck die Differentialgleichungen für $Q(t) = q_1(t) + q_2(t)$ und $q(t) = q_1(t) - q_2(t)$ auf und geben Sie die allgemeine Lösung für $Q(t)$ und $q(t)$ an. $Q(t)$ und $q(t)$ werden Normalmoden genannt.
- c. Transformieren Sie jetzt die allgemeine Lösung auf die ursprünglichen Koordinaten $q_1(t)$ und $q_2(t)$ zurück.
- d. Skizzieren Sie die Schwingungen $q_1(t)$ und $q_2(t)$ für die beiden Spezialfälle $Q(t) = 0$ und $q(t) = 0$.