Universität Bielefeld	Vertiefung der klassischen	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	Mechanik und Elektrodynamik	jschnack@uni-bielefeld.de
Wintersemester	2024	6193, E5-120

Aufgabenblatt 3

3.1 Linearer harmonischer Oszillator

Wir diskutieren die allgemeine Lösung

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \tag{1}$$

des linearen harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ . \tag{2}$$

a. Wie hängen die Parameter A und B mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}_0 = v_0$ zusammen?

b. Zu welchen Zeiten t_1 erreicht der Oszillator seinen Maximalausschlag x_{max}? Wie groß ist x_{max}? Welchen Wert hat die Beschleunigung zur Zeit t_1?

c. Zu welchen Zeiten t_2 erreicht der Oszillator seine Maximalgeschwindigkeit $\dot{x}_{\text{max}}$? Wie groß ist $\dot{x}_{\text{max}}$? Wie groß ist die Auslenkung zur Zeit t_2? Welche einfache Beziehung besteht zwischen x_{max} und $\dot{x}_{\text{max}}$?

d. Zu welchen Zeiten t_3 erfährt der Oszillator die maximale Beschleunigung $\ddot{x}_{\text{max}}$? Wie groß ist diese? Welche Werte haben die Auslenkung und die Geschwindigkeit zur Zeit t_3?

3.2 Rückläufigkeit der Planeten im geozentrischen Bezugssystem

Man nehme vereinfachend an, dass die Erde sowie ein äußerer Planet in ein und derselben Ebene gleichsinnige gleichförmige Kreisbewegungen mit den Radien r_E beziehungsweise r_P und Winkelgeschwindigkeiten ω_E bzw. ω_P ausführen. Diese Bewegungen kann man durch entsprechende zeitabhängige komplexe Zahlen $z_E(t)$ und $z_P(t)$ beschreiben.
Man mache die sogenannte „kopernikanische Wende“ rückgängig, indem man die Erde als Bezugspunkt wählt, so dass die Planetenbewegung durch den geozentrischen Zeiger

$$z(t) = z_P(t) - z_E(t) \tag{3}$$

als einfache Epizykelbewegung dargestellt wird.

a. Zur Wiederholung mache man sich klar, wie die komplexen Zahlen mit den kartesischen Koordinaten bzw. den Polarkoordinaten der Ebene zusammenhängen.

b. Man berechne die geozentrische Winkelgeschwindigkeit des Planeten als Funktion der Zeit.

c. Man gebe insbesondere die extremalen Werte dafür an.

d. Man beweise mit Hilfe des dritten Keplergesetzes, dass der Planet rückläufig wird.

3.3 Foucault-Effekt

a. Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{4}$$

hat mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ die allgemeine Lösung

$$x(t) = v_0 G(t) + x_0 H(t), \tag{5}$$

wobei die Funktionen $G(t)$ und $H(t)$ wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{p_1 - p_2} \\ H(t) &= \frac{p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}}{p_1 - p_2} \\ p_{1/2} &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\ . \end{aligned} \tag{6}$$

Zeigen Sie durch Einsetzen, dass die Funktion (5) Lösung der Differentialgleichung (4) ist. Nutzen Sie dabei aus, dass der entstandene (etwas längliche) Term aus vier Bestandteilen besteht, die getrennt verschwinden.

b. Die Bewegung eines Foucault-Pendels geringer Amplitude lässt sich in der $x-y$-Ebene durch die folgende Differentialgleichung beschreiben

$$\ddot{z} + 2\, i\, \omega\ \sin\psi\ \dot{z} + \omega_0^2\, z = 0\ ,\ z = x + i\ y\ . \tag{7}$$

Dabei sind ω die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung, ψ die geographische Breite und $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ die Kreisfrequenz der Pendelschwingung. Das Foucault-Pendel der Universität Osnabrück hat eine Pendellänge von $l = 19,5$ m. Die Stadt Osnabrück hat die Koordinaten $8^o 3' 2''$ östlicher Länge, $52^o 16' 28''$ nördlicher Breite.

Bestimmen Sie die Werte der notwendigen Konstanten, geben Sie die Bahnkurven an und stellen Sie diese mit Hilfe eines Computerprogramms graphisch dar für die Anfangsbedingung
(i) $x(0) = x_0 = 1$ m und $\dot{x}(0) = 0$ sowie
(ii) $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0 = 0,7$ m/s.
Die Anfangswerte der jeweiligen y-Komponenten seien Null.

3.4 Präsenzaufgabe: Rotierendes Bezugssystem

Bitte lösen Sie am Ende der Übungsstunde die folgende Präsenzaufgabe. Falls nicht genügend Zeit ist, bearbeiten Sie diese bitte zu Hause. Es ist eine Aufgabe aus der Einführungsvorlesung.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ seien die kartesischen Koordinatensysteme K und K' deckungsgleich. K sei ein Inertialsystem. Das Koordinatensystem K' drehe sich um die z-Achse entgegen dem Uhrzeiger mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Im Koordinatensystem K bewege sich die Masse m mit konstanter Beschleunigung auf der x-Achse. Zur Zeit $t = 0$ starte sie im Ursprung mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$.

a. Skizzieren Sie die Situation.

b. Wie lautet das Orts-Zeit-Gesetz im Koordinatensystem K?

c. Beschreiben Sie die Bahnkurve, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung im Koordinatensystem K'. Überlegen Sie sich dazu, welche Koordinaten ein Punkt $\vec{x}$ aus K in K' hat.

d. Kommentieren Sie die in der Beschleunigung auftretenden Terme. Verwenden Sie die Begriffe $\vec{e}_\phi$ und $\vec{e}_r$.