Universität Bielefeld	Einführung in die klassische	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	Mechanik und Elektrodynamik	jschnack@uni-bielefeld.de
Sommersemester	2024	6193, E5-120

Aufgabenblatt 6

6.1 Gekoppelte harmonische Oszillatoren I

Zwei identische harmonische Oszillatoren (ohne Reibung und Antrieb) mit der Federkonstanten k und Massen m seien harmonisch gekoppelt, d.h. mit einer weiteren Feder der Stärke k_{12} verbunden. Die Schwingungen erfolgen alle entlang einer Geraden, d.h. in einer Dimension.

a. Erstellen Sie eine Skizze des Aufbaus. Benennen Sie die Auslenkungen der beiden identischen Massen m aus ihren Ruhelagen mit q_1 und q_2. Stellen Sie die gekoppelten Bewegungsgleichungen für q_1 und q_2 auf.

b. Die Bewegungsgleichungen können durch Superpositionen von $q_1(t)$ und $q_2(t)$ entkoppelt werden. Stellen Sie zu diesem Zweck die Differentialgleichungen für $Q(t) = q_1(t) + q_2(t)$ und $q(t) = q_1(t) - q_2(t)$ auf und geben Sie die allgemeine Lösung für $Q(t)$ und $q(t)$ an. $Q(t)$ und $q(t)$ werden Normalmoden genannt.

c. Transformieren Sie jetzt die allgemeine Lösung auf die ursprünglichen Koordinaten $q_1(t)$ und $q_2(t)$ zurück.

d. Skizzieren Sie die Schwingungen $q_1(t)$ und $q_2(t)$ für die beiden Spezialfälle $Q(t) = 0$ und $q(t) = 0$.

6.2 Auftrieb, Gaußscher Satz

In einem alten Corona-Archiv wurde das Dokument aus dem Anhang gefunden, das kryptische Notizen und zwei abfotografierte Tafeln zeigt. Nutzen Sie diese Information, um in dieser Aufgabe den Auftrieb ein für alle Male zu erledigen.
Ein starrer Körper sei in einer inkompressiben Flüssigkeit ganz oder teilweise untergetaucht. Mit Ω werde der untergetauchte Bereich (bzw. der Bereich der verdrängten Flüssigkeit) und mit $\partial\Omega$ die umschließende Oberfläche bezeichnet. Die Flüssigkeit hat die konstante Dichte ρ, und infolge der Schwerkraft herrscht in ihr der hydrostatische Druck

$$p_h = -\rho\, g\, z \tag{1}$$

mit $-z$ als Eintauchtiefe. Demzufolge wirkt auf ein Flächenelement $\mathrm{d}\vec{A}$ des eingetauchten Körpers die Auftriebskraft

$$-\vec{e}_z \cdot p_h\, \mathrm{d}\vec{A} \tag{2}$$

und insgesamt der Auftrieb (in z-Richtung)

$$F_{\text{Auftrieb}} = -\int_{\partial\Omega} \vec{e}_z \cdot p_h \, \mathrm{d}\vec{A} \; . \tag{3}$$

Machen Sie sich klar, wo die z-Achse hinzeigt.

a. Wie lautet der Gaußsche Satz?

b. Man beweise, dass

$$F_{\text{Auftrieb}} = Mg \tag{4}$$

mit M als Gesamtmasse der verdrängten Flüssigkeit.

c. Man berechne die Querkraft $\vec{F}_{\text{Quer}}$

$$\vec{F}_{\text{Quer}} = -\vec{e}_x \int_{\partial\Omega} \vec{e}_x \cdot p_h \, \mathrm{d}\vec{A} - \vec{e}_y \int_{\partial\Omega} \vec{e}_y \cdot p_h \, \mathrm{d}\vec{A} \; . \tag{5}$$

d. Richtig elegant wäre es ja, die ganze Sache in einem Stück durchzurechnen, also

$$\vec{F}_{\text{Auftrieb}} = -\int_{\partial\Omega} p_h \, \mathrm{d}\vec{A} \; . \tag{6}$$

Dann würde auch automatisch herauskommen, in welche Richtung der Auftrieb zeigt. Legen Sie los.

6.3 Zusatzaufgabe: Ballonflug im Alpenvorland

Ein Heißluftballonfahrer benutzt einen Ballon in Form einer großen Milchkuh mit einem Volumen von $V_{\text{Ballon}} = 5000\text{m}^3$. Er schwebt in der neutral geschichteten Troposphäre.

Neutrale Schichtung bedeutet, dass die Dichte ρ und die Temperatur T wie folgt von der Höhe z über dem Erdboden abhängen:

$$\begin{aligned} T(z) &= T_0\,(1-z/L) && (7) \\ \rho(z) &= \rho_0(1-z/L)^{2.5}\ ,\ \text{mit}\quad \rho_0 = \frac{m\,p_0}{k_B\,T_0} && (8) \end{aligned}$$

und $L = 29.83$ km. Dabei ist $k_B \approx 1.3805 \cdot 10^{-23}$ J/K die Boltzmannkonstante und $m = 28.84/(6.023 \cdot 10^{26})$ kg die mittlere Masse eines Luftmoleküls. Ballonhülle und Fracht haben zusammen die Masse $M_{\text{Last}} = 500$ kg. Es sei $p_0 = 1000$ Hektopascal und $T_0 = 290$ K. In welcher Höhe z_0 schwebt der Ballon, wenn die Ballontemperatur auf 10% über der Umgebungstemperatur gehalten wird? Käme man über die Alpen?
Anleitung: z_0 werde als mittlere z-Koordinate des Ballons gemäß

$$\rho(z_0) \quad =: \quad \frac{1}{V_{\text{Ballon}}}\int_{\text{Ballon}} \mathrm{d}V_{\vec{r}}\ \rho(z) \tag{9}$$

definiert. Auf ein nach außen gerichtetes Flächenelement $\mathrm{d}\vec{A}_{\vec{r}}$ der Ballonhülle wirkt die Kraft $-p(z)\mathrm{d}\vec{A}_{\vec{r}}$, die durch den Luftdruck $p = p(z)$ verursacht wird. Die resultierende Auftriebskraft kann man durch z_0 ausdrücken, wenn man den Gaußschen Satz und die hydrostatische Grundgleichung

$$\frac{\partial\, p}{\partial\, z} \quad = \quad -\rho\, g \tag{10}$$

mit $g = const$ benutzt. Diese Auftriebskraft ist dem Gesamtgewicht von Ballonhülle, Gasinhalt und Fracht – also

$$-g\left(M_{\text{Last}} + \int \mathrm{d}V_{\vec{r}}\ \rho_{\text{Ballon}}\right)\cdot \vec{e}_z \tag{11}$$

betragsmäßig gleichzusetzen. Man kann die ideale Gasgleichung

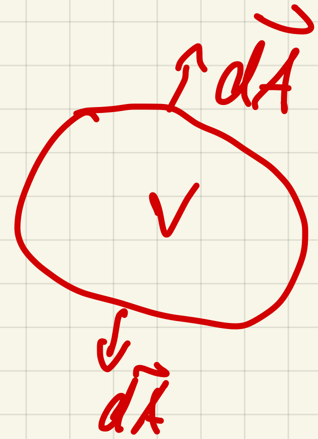
$$\rho_{\text{Ballon}} \quad = \quad \frac{mp(z)}{k_B\ T_{\text{Ballon}}} = \rho(z)\frac{T(z)}{T_{\text{Ballon}}} \tag{12}$$

verwenden. Mit (8) hat man dann die Bestimmungsgleichung für z_0.

8.11. 2021-2

Gauß für Vektorfelder

$$\int_V dV \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{E} = \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{E}$$



Gauß für skalare Felder

$$\int_V dV \frac{\partial}{\partial \vec{x}} p(\vec{x}) = \int_{\partial V} d\vec{A}\, p(\vec{x})$$