Universität Bielefeld	Einführung in die klassische	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	Mechanik und Elektrodynamik	jschnack@uni-bielefeld.de
Sommersemester	2024	6193, E5-120

Aufgabenblatt 5

5.1 Eindimensionale Bewegung mit Reibungskraft

Ein Körper bewege sich in einer Dimension unter dem Einfluß der Reibungskraft $f(v)$ nach folgender Bewegungsgleichung

$$m\,\dot{v} = f(v)\ , \qquad v \geq 0\ . \tag{1}$$

Die Reibungskraft ist durch zwei Parameter charakterisiert, durch die Haftreibung $H > 0$ und den Reibungskoeffizienten $\gamma > 0$. Sie hat die Form

$$f(v) = -H\left[1 + \left(\frac{\gamma\, v}{H}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}\ . \tag{2}$$

a. Man bestimme den Grenzwert von $f(v)$ für $v \to 0$ sowie das asymptotische Verhalten, d.h., die asymptotische Form der Funktion $f(v)$ für $v \to \infty$.

b. Wie verhält sich die Reibungskraft für $n \to \infty$?

c. Skizzieren Sie den Verlauf von $f(v)$ für $n = 2$ und $n \to \infty$.

d. Im weiteren sei $n = 2$. Leiten Sie die Lösung $v(t)$ der Bewegungsgleichung her. Trennen Sie dazu die Variablen und verwenden Sie Hyperbelfunktionen. Machen Sie sich vorher die Eigenschaften der Hyperbelfunktionen klar. Zeigen bzw. ermitteln Sie:

$$\cosh^2(x) \quad - \quad \sinh^2(x) = 1 \tag{3}$$
$$\sinh(x+y) = ?\ , \qquad \cosh(x+y) = ? \tag{4}$$
$$\sinh'(x) = ?\ , \qquad \cosh'(x) = ? \tag{5}$$
$$\text{arsinh}'(x) = ?\ , \qquad \text{arcosh}'(x) = ? \tag{6}$$

Stellen Sie die Umkehrfunktionen mittels ln dar.

e. Bestimmen Sie die Stoppzeit und stellen Sie diese als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit graphisch dar.

f. Bestimmen Sie die Wegstrecke, auf der ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 zum Stehen kommt.

g. Ein Mann ($m = 80$ kg, $H = 100$ N, $\gamma = 500$ kg/s) springt vom 10-Meter-Turm. Reicht die Beckentiefe von 3 Metern? Die Reibung in Luft kann vernachlässigt werden.

5.2 Raketengleichung

In der folgenden Aufgabe soll die Raketengleichung abgeleitet werden. Zusätzlich soll untersucht werden, ob und warum mehrstufige Raketen günstiger sind. Dazu sollen folgende Größen verwendet werden: μ sei der Massestrom der Triebwerke, d.h. die ausgestoßene Masse pro Zeit. Diese Masse werde mit der Geschwindigkeit u_{Treib} relativ zur Rakete ausgestoßen. Da die Geschwindigkeit der Rakete immer exakt entgegengesetzt der Geschwindigkeit der ausgestoßenen Gase ist, ist es nicht nötig, mit dreidimensionalen Vektoren zu rechnen.

a. Leiten Sie die Raketengleichung aus dem Impulserhaltungssatz in seiner differentiellen Form ab. Dieser lautet für die Rakete:

$$m(t)\,\mathrm{d}v = -u_{\text{Treib}}\,\mathrm{d}m\ . \tag{7}$$

Hier ist es jetzt wichtig, dass die Masse von der Zeit abhängt. Setzen Sie diese Abhängigkeit ein. Trennen Sie die Variablen und integrieren Sie von Null bis t auf. Die Masse der Rakete beim Start betrage m_{Start}. Die Masse am Ende des Brennvorgangs sei m_{End}.

b. Nehmen Sie jetzt an, dass die Rakete zweistufig ist, wobei $m_{\text{End}} = 0.1 m_{\text{Start}}$ sei. Die Masse der ersten Stufe ohne Treibstoff, also die Hülle sei ebenfalls $0.1 m_{\text{Start}}$; die restliche Masse ist der auf beide Stufen gleich verteilte Treibstoff. Vergleichen Sie die Endgeschwindigkeit mit der, die mit einer einstufigen Rakete mit $m_{\text{End}} = 0.2 m_{\text{Start}}$ erreicht werden kann.

5.3 Zusatzaufgabe: Foucault-Effekt

a. Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + w^2 x = 0 \tag{8}$$

hat mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ die allgemeine Lösung

$$x(t) = v_0 G(t) + x_0 H(t), \tag{9}$$

wobei die Funktionen $G(t)$ und $H(t)$ wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{p_1 - p_2} \\ H(t) &= \frac{p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}}{p_1 - p_2} \\ p_{1/2} &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\ . \end{aligned} \tag{10}$$

Zeigen Sie durch Einsetzen, dass die Funktion (9) Lösung der Differentialgleichung (8) ist. Nutzen Sie dabei aus, dass der entstandene (etwas längliche) Term aus vier Bestandteilen besteht, die getrennt verschwinden.

b. Die Bewegung eines Foucault-Pendels geringer Amplitude läßt sich in der $x-y$-Ebene durch die folgende Differentialgleichung beschreiben

$$\ddot{z} + 2\,i\,\omega\,\sin\psi\,\dot{z} + \omega_0^2\,z = 0\ ,\ z = x + i\,y\ . \tag{11}$$

Dabei sind ω die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung, ψ die geographische Breite und $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ die Kreisfrequenz der Pendelschwingung. Das Foucault-Pendel der Universität Osnabrück hat eine Pendellänge von $l = 19,5$ m. Die Stadt Osnabrück hat die Koordinaten $8^o 3' 2''$ östlicher Länge, $52^o 16' 28''$ nördlicher Breite.

Bestimmen Sie die Werte der notwendigen Konstanten, geben Sie die Bahnkurven an und stellen Sie diese mit Hilfe eines Computeralgebraprogramms (z.B. Mathematica) graphisch dar für die Anfangsbedingung (i) $x(0) = x_0 = 1$ m und $\dot{x}(0) = 0$ sowie (ii) $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0 = 0,7$ m/s. Die Anfangswerte der jeweiligen y-Komponenten seien Null.