Universität Bielefeld	Einführung in die klassische	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	Mechanik und Elektrodynamik	jschnack@uni-bielefeld.de
Sommersemester	2024	6193, E5-120

Aufgabenblatt 3

3.1 Kinematik in Kugelkoordinaten

a. Wie sind Kugelkoordinaten definiert? Welche Definitionsbereiche haben die Koordinaten?

b. Was für Koordinatenlinien ergeben sich? Erläutern Sie diese an einem Globus.

c. Man berechne die Basisvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$ und prüfe auf Orthogonalität. Die Vektoren sollten bzgl. des karthesischen Koordinatensystems dargestellt werden.

d. Man berechne den Ort $\vec{r}(t)$, die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und Beschleunigung $\vec{a}(t)$ bezüglich der eingeführten Orthonormalbasis $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$.

e. Wie lautet die Funktionaldeterminante? Wo sind Kugelkoordinaten lokal nicht umkehrbar?

3.2 Rotierendes Bezugssystem

Zum Zeitpunkt $t = 0$ seien die kartesischen Koordinatensysteme K und K' deckungsgleich. K sei ein Inertialsystem. Das Koordinatensystem K' drehe sich um die z-Achse entgegen dem Uhrzeiger mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Im Koordinatensystem K bewege sich die Masse m mit konstanter Beschleunigung auf der x-Achse. Zur Zeit $t = 0$ starte sie im Ursprung mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$.

a. Skizzieren Sie die Situation.

b. Wie lautet das Orts-Zeit-Gesetz im Koordinatensystem K?

c. Beschreiben Sie die Bahnkurve, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung im Koordinatensystem K'. Überlegen Sie sich dazu, welche Koordinaten ein Punkt $\vec{x}$ aus K in K' hat.

d. Kommentieren Sie die in der Beschleunigung auftretenden Terme. Verwenden Sie die Begriffe $\vec{e}_\phi$ und $\vec{e}_r$.

3.3 Kinematik in krummlinigen Koordinaten

Hier möchte ich Ihnen ein Beispiel sehr ungewöhnlicher Koordinaten vorstellen. Danach finden Sie Kugelkoordinaten bestimmt total sympathisch.
Ausgehend von kartesischen Koordinaten x, y, z seien die Koordinaten χ, ψ, ϕ wie folgt eingeführt ($l > 0$, fest):

$$\begin{aligned} x &= l \, \cos\psi \, \cosh\chi \, \cos\phi \\ y &= l \, \cos\psi \, \cosh\chi \, \sin\phi \\ z &= l \, \sin\psi \, \sinh\chi \, . \end{aligned} \tag{1}$$

Die Koordinaten durchlaufen dabei die folgenden Werte: $\chi = 0 \ldots \infty, \psi = -\pi/2 \ldots \pi/2$, $\phi = 0 \ldots 2\pi$.

a. **Zettel 2:** Machen Sie sich sinh und cosh klar. Skizzieren Sie die Verläufe und geben Sie Definitions- und Wertebereiche an.

b. **Zettel 2:** Was für Koordinatenlinien ergeben sich für $\psi, \chi = const$; $\psi, \phi = const$; $\phi, \chi = const$? Nutzen Sie zum Beispiel Mathematica, um sich die Koordinatenlinien anzusehen. Wer kann eine Lösung mit einem anderen Programm, z.B. Python beisteuern?

   Ab hier auf Zettel 3:

c. Man berechne die Basisvektoren $\vec{e}_\chi$, $\vec{e}_\psi$, $\vec{e}_\phi$ und prüfe auf Orthogonalität. Die Vektoren sollten bzgl. des karthesischen Koordinatensystems dargestellt werden.

d. **Zusatzaufgabe:** Was für Koordinatenflächen ergeben sich jeweils für $\psi = const$, $\chi = const$ und $\phi = const$? Hier hilft geschicktes Quadrieren weiter, um auf Gleichungen für Ellipsoide und Hyperboloide zu kommen.

e. **Zusatzaufgabe:** Man berechne die Geschwindigkeitskoordinaten v_χ, v_ψ und v_ϕ. Wenn Sie noch nichts vorhaben und die Tutoren in den Wahnsinn treiben wollen, machen Sie auch noch die Beschleunigung.

f. **Zusatzaufgabe:** Man gebe die Umkehrtransformation zu (1) an.

Sie werden hier auf Ellipsen und Hyperbeln stoßen! Literatur z.B. Greiner, Bd. 1, S. 68-80 und Bronstein, S. 220 ff