

Universität Bielefeld Fakultät für Physik Sommersemester	Einführung in die klassische Mechanik und Elektrodynamik 2024	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de 6193, E5-120
--	---	---

Aufgabenblatt 2

2.1 Bewegung im Schwerfeld der Erde

Betrachten Sie die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{g} \quad (1)$$

eines Teilchens im Schwerfeld der Erde nahe der Erdoberfläche. Im kartesischen Koordinatensystem weise die z -Achse nach oben, d.h. $\vec{g} = (0, 0, -g)$.

- Wie lautet das Orts-Zeit-Gesetz $\vec{r}(t)$, wenn das Teilchen zur Zeit $t = 0$ im Koordinatenursprung mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ startet? Begründen Sie Ihre Lösung.
- Zeigen Sie, dass die Bewegung in einer festen Ebene erfolgt. Welche Richtung hat die Flächennormale der Bahnebene?
- Machen Sie eine Skizze von dem Vorgang (dreidimensional, Draufsicht, Seitenansicht, ...). Clevere Physiker würden sich das Koordinatensystem nicht vorschreiben lassen. Was würden Sie tun?

2.2 Koordinatentransformationen

- Wie lassen sich Kugelkoordinaten mit Hilfe von kartesischen Koordinaten darstellen?
- Wie lautet die Umkehrtransformation?
- Stellen Sie sich vor, ein Fahrzeug fährt auf der Erdoberfläche entlang des nullten Längengrades vom Nordpol zum Südpol mit konstanter Geschwindigkeit. Die Erde wird dabei als Kugel mit dem Radius R_E betrachtet. Wie kann man diese Bewegung in kartesischen Koordinaten und wie in Kugelkoordinaten darstellen?

2.3 Kinematik in krummlinigen Koordinaten

Hier möchte ich Ihnen ein Beispiel sehr ungewöhnlicher Koordinaten vorstellen. Danach finden Sie Kugelkoordinaten bestimmt total sympathisch.

Ausgehend von kartesischen Koordinaten x, y, z seien die Koordinaten χ, ψ, ϕ wie folgt eingeführt ($l > 0$, fest):

$$\begin{aligned}x &= l \cos \psi \cosh \chi \cos \phi \\y &= l \cos \psi \cosh \chi \sin \phi \\z &= l \sin \psi \sinh \chi .\end{aligned}\tag{2}$$

Die Koordinaten durchlaufen dabei die folgenden Werte: $\chi = 0 \dots \infty, \psi = -\pi/2 \dots \pi/2, \phi = 0 \dots 2\pi$.

- Machen Sie sich $\sinh$ und $\cosh$ klar. Skizzieren Sie die Verläufe und geben Sie Definitions- und Wertebereiche an.
- Was für Koordinatenlinien ergeben sich für $\psi, \chi = \text{const}$; $\psi, \phi = \text{const}$; $\phi, \chi = \text{const}$? Nutzen Sie zum Beispiel Mathematica, um sich die Koordinatenlinien anzusehen. Wer kann eine Lösung mit einem anderen Programm, z.B. Python beisteuern?
- Man berechne die Basisvektoren $\vec{e}_\chi, \vec{e}_\psi, \vec{e}_\phi$ und prüfe auf Orthogonalität. Die Vektoren sollten bzgl. des kartesischen Koordinatensystems dargestellt werden.
- Zusatzaufgabe:** Was für Koordinatenflächen ergeben sich jeweils für $\psi = \text{const}$, $\chi = \text{const}$ und $\phi = \text{const}$? Hier hilft geschicktes Quadrieren weiter, um auf Gleichungen für Ellipsoide und Hyperboloide zu kommen.
- Zusatzaufgabe:** Man berechne die Geschwindigkeitskoordinaten v_χ, v_ψ und v_ϕ . Wenn Sie noch nichts vorhaben und die Tutoren in den Wahnsinn treiben wollen, machen Sie auch noch die Beschleunigung.
- Zusatzaufgabe:** Man gebe die Umkehrtransformation zu (2) an.

Sie werden hier auf Ellipsen und Hyperbeln stoßen! Literatur z.B. Greiner, Bd. 1, S. 68-80 und Bronstein, S. 220 ff