

Aufgabenblatt 12

12.1 Hamiltonoperator und Teilchenzahloperator in zweiter Quantisierung

In zweiter Quantisierung kann der Hamiltonoperator für ideale Quantengase wie folgt dargestellt werden

$$\underline{H} = \sum_k \varepsilon_k \underline{a}_k^\dagger \underline{a}_k . \quad (1)$$

ε_k sind die zum Einteilcheneigenzustand $|k\rangle$ gehörigen Einteilchenenergieeigenwerte. Der Teilchenzahloperator lautet dann

$$\underline{N} = \sum_k \underline{a}_k^\dagger \underline{a}_k . \quad (2)$$

Die Operatoren \underline{a}_k^\dagger und \underline{a}_k seien die Erzeuger und Vernichter eines Fermions im Einteilchenzustand $|k\rangle$. Die Ausdrücke gelten für Bosonen entsprechend, die zugehörigen Operatoren können z. B. mit \underline{b}_k^\dagger und \underline{b}_k bezeichnet werden.

Zeigen Sie, daß \underline{H} und \underline{N} vertauschen. Nutzen Sie dazu die Kommutatorrelationen für \underline{a}_k^\dagger und \underline{a}_k bzw. \underline{b}_k^\dagger und \underline{b}_k aus der Vorlesung.

12.2 Mittlere Besetzungszahl des Einteilchenzustandes

- Geben Sie die Formel für die mittlere Besetzungszahl \bar{n} des Einteilchenzustandes für ideale Fermionen an und erläutern Sie die auftretenden Größen.
- Bestimmen Sie die Energie ε , bei der $\bar{n}(\varepsilon)$ einen Wendepunkt hat.
- Begründen Sie, warum $\mu(T = 0) = \varepsilon_F$.

12.3 Zweidimensionales Fermigas

Betrachten Sie analog zur Vorlesung ein zweidimensionales Fermigas aus Fermionen mit einem Spin $s = 1/2$. Die Abmessung des Systems betrage $L \times L$, die Eigenzustände sollen periodische Randbedingungen am Rand der Zelle erfüllen.

- Geben Sie den Hamiltonoperator des Systems sowie seine Eigenwerte und Eigenvektoren an.

- b. Skizzieren Sie in einem zweidimensionalen Koordinatensystem die erlaubten \vec{k} -Quantenzahlen und begründen Sie, warum die im Grundzustand besetzten \vec{k} -Quantenzahlen für große N in guter Näherung eine Kreisfläche bilden.
- c. Berechnen Sie ε_F als Funktion der Dichte $\rho = N/L^2$.
- d. Berechnen Sie die Einteilchenzustandsdichte $g(\varepsilon)$.
- e. **Zusatzaufgabe:** Berechnen Sie das chemische Potential, die innere Energie und die Wärmekapazität bis zur quadratischen Ordnung in T (analog zur Vorlesung).