

Aufgabenblatt 8

8.1 Ofen beim Stern-Gerlach-Versuch

In der Vorlesung wurde behauptet, dass der Zustand der aus dem Ofen austretenden Silberatome durch den statistischen Operator

$$\tilde{R} = \frac{1}{2} (|s_z+\rangle\langle s_z+| + |s_z-\rangle\langle s_z-|) \quad (1)$$

beschrieben werden muss.

Man könnte doch auch vermuten, dass der Zustand durch

$$|\phi_{\text{Ofen}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |s_z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |s_z-\rangle \quad (2)$$

beschrieben wird. Wiederholen Sie die Argumente, warum diese Beschreibung nicht adäquat ist.

8.2 Zweiniveausystem im kanonischen Ensemble

Das Zweiniveausystem wurde schon in der Vorlesung behandelt. Diese Aufgabe dient der Vertiefung. Bitte vollziehen Sie alle Schritte nach.

Ein Quantensystem, z.B. ein einzelner Spin mit $s = 1/2$ im homogenen Magnetfeld, habe zwei Energieniveaus mit Energien $E_1 < E_2$.

- Stellen Sie die Zustandssumme auf.
- Berechnen Sie die innere Energie U und stellen Sie U als Funktion von $k_B T / \Delta$ (schematisch) dar. Dabei sei $\Delta = E_2 - E_1$.
- Gegen welche Werte geht U für $T \rightarrow 0$ sowie für $T \rightarrow \infty$.
- Berechnen Sie die Wärmekapazität C und stellen Sie C/k_B als Funktion von $k_B T / \Delta$ (schematisch) dar.
- Gegen welche Werte geht C für $T \rightarrow 0$ sowie für $T \rightarrow \infty$.
- Stellen Sie die Besetzungswahrscheinlichkeiten (bzw. Besetzungszahlen) der beiden Niveaus als Funktion von $k_B T / \Delta$ (schematisch) dar. Diskutieren Sie das Verhalten insbesondere für $T \rightarrow 0$ sowie für $T \rightarrow \infty$.
- Berechnen Sie die Entropie S und stellen Sie S als Funktion von $k_B T / \Delta$ (schematisch) dar.

- h. Gegen welche Werte geht S für $T \rightarrow 0$ sowie für $T \rightarrow \infty$.
- i. In einem Zweiniveausystem kann eine sogenannte Besetzungsinversion auftreten, die man formal durch eine negative Temperatur charakterisieren kann. Wie groß ist $k_B T / \Delta$, wenn die Besetzungszahl des oberen Niveaus 0.8 und die des unteren 0.2 ist?

8.3 Paramagnet im äußeren Magnetfeld

Ein einzelner Spin der Spinquantenzahl s befinde sich im äußeren homogenen Magnetfeld der Stärke B . Die Wechselwirkung des Spins mit dem Magnetfeld wird durch den Zeeman-Term beschrieben.

- a. Wie lautet der Hamiltonoperator?
- b. Geben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von \tilde{H} an.
- c. Ermitteln Sie die Zustandssumme im kanonischen Ensemble.
- d. Leiten Sie die mittlere Energie sowie die Wärmekapazität als Funktion von T und B her.
- e. Leiten Sie ebenfalls die Magnetisierung und die Suszeptibilität als Funktion von T und B her. Welchen Wert nimmt die Magnetisierung für $T \rightarrow 0$ an? Erklären Sie diesen Sachverhalt.
- f. Stellen Sie in einem Diagramm die Energieniveaus für $s = 1$ bei nicht verschwindendem Magnetfeld sowie die zugehörige innere Energie in Abhängigkeit von der Temperatur dar. Überlegen Sie sich, welche dimensionslosen Größen Sie auftragen.