

Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik III WS 2023/2024	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de
--	---	---

Bitte jede Aufgabe (1.1, 2.1, 2.2, ...) auf einem neuen Blatt. Name, Vorname und Matrikelnummer jeweils nicht vergessen.

1 Wissen

1.1 Thermodynamik & Statistik (36 P.)

- Skizzieren und charakterisieren Sie kurz abgeschlossene, geschlossene und offene Systeme. Wie lautet der erste Hauptsatz für diese drei Fälle (9 P.)?
- Skizzieren Sie den Carnot-Prozess als Wärmekraftmaschine mit den entsprechenden Energieflüssen und stellen Sie den Prozess im $(T - S)$ -Diagramm für ein Medium Ihrer Wahl schematisch dar. Bezeichnen Sie die Kurven. Wie lautet der Wirkungsgrad ausgedrückt mit den vorkommenden Energien und wie mit den absoluten Temperaturen? Wie ändert sich das $(T - S)$ -Diagramm für ein anderes Medium (9 P.)?
- Wie lautet das totale Differential der inneren Energie bei fester Teilchenzahl und Volumenarbeit? Welche Maxwell-Relation können Sie ableiten? Welche beiden Gleichungen folgen aus der Tatsache, dass U eine homogene Funktion erster Ordnung der extensiven unabhängigen Zustandsvariablen ist? Die Gibbsche freie Enthalpie sei $G = U - TS + pV$. Wie lautet ihr totales Differential und wie die zugehörige Maxwell-Relation (6 P.)?
- Wie lautet das Wiensche Verschiebungsgesetz? Leiten Sie die Form des Wienschen Verschiebungsgesetzes aus der spektralen Energiedichte

$$u(T, \omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1} \quad (1)$$

her. Der genaue Wert der Proportionalitätskonstante ist nicht wichtig (4 P.).

- Geben Sie die Zustandsgleichung für das van-der-Waals-Gas an und skizzieren Sie Isothermen im $(p - V)$ -Diagramm. Skizzieren Sie an einer Isothermen die Maxwell-Konstruktion und schreiben Sie kurz, was das ist und worum man das macht (8 P.)?

2 Können

2.1 Wirkungsgrad des Otto-Motors (22 P.)

Ein Viertakt-Otto-Motor arbeitet nicht als Carnot-Maschine, sondern er hat einen anderen Zyklus, bei dem keine Isothermen sondern Isochoren vorkommen, siehe Abbildung 1.

- a. Zeigen Sie, dass der Wirkungsgrad des Otto-Motors

$$\eta = 1 - r^{1-\gamma} \quad (2)$$

ist. Dabei ist $r = V_1/V_2$ die sogenannte Kompression (Verdichtung) und $\gamma = C_p/C_V$. Nehmen Sie an, dass das Arbeitsmedium in guter Näherung ein ideales Gas ist (18 P.)

- b. Diskutieren Sie die Rolle der Verdichtung für den Wirkungsgrad (4 P.).

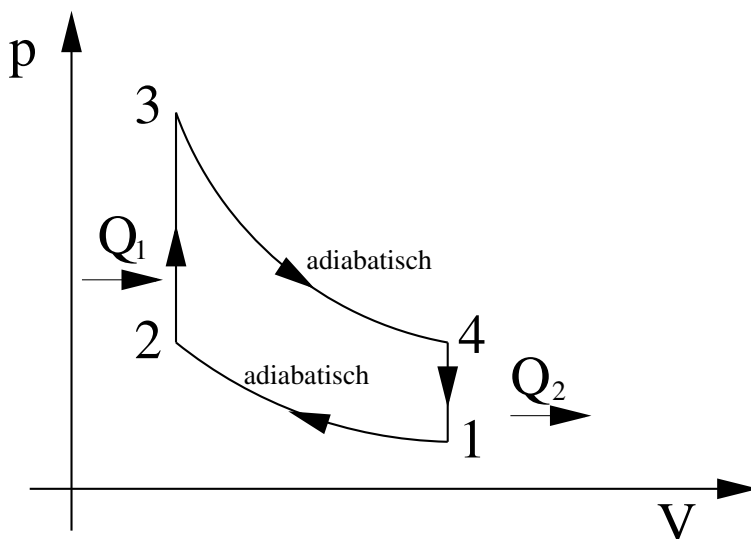


Abbildung 1: Zyklus eines Otto-Motors aus adiabatischer Kompression ($1 \Rightarrow 2$), isochorer Erwärmung ($2 \Rightarrow 3$), adiabatischer Expansion ($3 \Rightarrow 4$) und isochorer Abkühlung ($4 \Rightarrow 1$).

2.2 Spin-1/2-Paramagnet im kanonischen Ensemble (22 P.)

Wir betrachten einen Spin $s = 1/2$ im äußeren Magnetfeld mit $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

- Geben Sie den Hamiltonoperator an (2 P.).
- Stellen Sie die Zustandssumme auf (2 P.).
- Berechnen Sie die innere Energie U und stellen Sie U als Funktion von T (schematisch) für zwei Felder $0 < B_1 < B_2$ dar (4 P.).
- Gegen welche Werte geht U für $T \rightarrow 0$ sowie für $T \rightarrow \infty$ bei $B > 0$ (2 P.).
- Die Magnetisierung ist der thermische Erwartungswert von $-g\mu_B s^z$. Berechnen Sie die Magnetisierung M und stellen Sie diese als Funktion von B (schematisch) für zwei Temperaturen $0 < T_1 < T_2$ dar (6 P.).

- f. Gegen welche Werte geht M für $B \rightarrow 0$ sowie für $B \rightarrow \infty$ bei $T > 0$ (2 P.).
- g. Definieren die Besetzungswahrscheinlichkeiten (bzw. Besetzungszahlen) der Energieniveaus und stellen sie diese als Funktion der Temperatur für $B > 0$ (schematisch) dar. Diskutieren Sie das Verhalten insbesondere für $T \rightarrow 0$ sowie für $T \rightarrow \infty$ (4 P.).

2.3 Gleichverteilungssatz (22 P.)

- a. Wie lautet die Zustandssumme der klassischen statistischen Mechanik? Benennen Sie die auftretenden Symbole (4 P.)?
- b. Wie lautet der Gleichverteilungssatz der klassischen statistischen Mechanik (6 P.)?
- c. Wie lautet die innere Energie des klassischen idealen Gases aus N Punktteilchen in zwei Raumdimensionen? Begründen Sie (3 P.).
- d. Wie lautet die Wärmekapazität eines Systems aus N klassischen harmonischen Oszillatoren, die paarweise miteinander wechselwirken, wobei das Wechselwirkungspotential quadratisch vom Abstand abhängt? Begründen Sie das Ergebnis (3 P.).
- e. Wie lautet die kanonische Zustandssumme für einen eindimensionalen quantenmechanischen Oszillator? Vereinfachen Sie soweit wie möglich (6 P.).

3 Weiterdenken

3.1 Zweidimensionales Fermigas (16 P.)

Betrachten Sie analog zur Vorlesung ein zweidimensionales Fermigas aus Fermionen mit einem Spin $s = 1/2$. Die Abmessung des Systems betrage $L \times L$, die Eigenzustände sollen periodische Randbedingungen am Rand der Zelle erfüllen.

- a. Geben Sie den Hamiltonoperator des Systems sowie seine Eigenwerte an. Durch welche Quantenzahlen lassen sich die Eigenvektoren charakterisieren (6 P.)?
- b. Skizzieren Sie in einem zweidimensionalen Koordinatensystem die erlaubten $\vec{k}$ -Quantenzahlen und begründen Sie, welche Fläche die im Grundzustand besetzten $\vec{k}$ -Quantenzahlen für große N in guter Näherung bilden (4 P.).
- c. Berechnen Sie ε_F als Funktion der Dichte $\rho = N/L^2$ (6 P.).

Es können 118 Punkte erreicht werden.

Noten

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow 5.0$
- $51 \leq P \leq 55 \Rightarrow 4.0$
- $56 \leq P \leq 60 \Rightarrow 3.7$
- $61 \leq P \leq 65 \Rightarrow 3.3$
- $66 \leq P \leq 70 \Rightarrow 3.0$
- $71 \leq P \leq 75 \Rightarrow 2.7$
- $76 \leq P \leq 80 \Rightarrow 2.3$
- $81 \leq P \leq 85 \Rightarrow 2.0$
- $86 \leq P \leq 90 \Rightarrow 1.7$
- $91 \leq P \leq 95 \Rightarrow 1.3$
- $96 \leq P \leq \infty \Rightarrow 1.0$

Viel Erfolg!