Universität Bielefeld	Theoretische Physik III	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	WS 2023/2024	jschnack@uni-bielefeld.de

Bitte jede Aufgabe (1.1, 2.1, 2.2, . . .) auf einem neuen Blatt.
Name, Vorname und Matrikelnummer jeweils nicht vergessen.

1 Wissen

1.1 Thermodynamik & Statistik (33 P.)

a. Welche (≥ 3) Szenarien behandelt der erste Hauptsatz und was sagt er für diese aus? Kurze Erklärungen, Skizzen, Gleichungen (9 P.).

b. Skizzieren Sie den Carnot-Prozess als Wärmekraftmaschine mit den entsprechenden Energieflüssen und stellen Sie den Prozess im $(p - V)$-Diagramm für ein ideales Gas schematisch dar. Bezeichnen Sie die Kurven. Wie lautet der Wirkungsgrad ausgedrückt mit den vorkommenden Energien und wie mit den absoluten Temperaturen (8 P.)?

c. Wie lautet das totale Differential der inneren Energie bei fester Teilchenzahl und Volumenarbeit? Welche Maxwell-Relation können Sie ableiten? Welche beiden Gleichungen folgen aus der Tatsache, dass U eine homogene Funktion erster Ordnung der extensiven unabhängigen Zustandsvariablen ist? Die freie Energie sei $F = U - TS$. Wie lautet ihr totales Differential und wie die zugehörige Maxwell-Relation (6 P.)?

d. Leiten Sie die Form des Wienschen Verschiebungsgesetzes aus der spektralen Energiedichte

$$u(T, \omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \tag{1}$$

her. Der genaue Wert der Proportionalitätskonstante ist nicht wichtig (4 P.).

e. Geben Sie die Formeln für die Fermi-Dirac- sowie die Bose-Einstein-Verteilung an. Was beschreiben diese Formeln (6 P.)?

2 Können

2.1 Wärmekapazität von Gasen (22 P.)

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik lässt sich im Falle von Volumenarbeit $\delta W = -p\mathrm{d}V$ wie folgt konkretisieren

$$\mathrm{d}U = \delta Q - p\mathrm{d}V \ . \tag{2}$$

Für die innere Energie nehmen wir im Folgenden an, dass sie als eine Funktion von Temperatur und Volumen dargestellt werden kann, d.h. $U = U(T, V)$.

a. Wie lautet das totale Differential von $U = U(T, V)$ (4 P.)?

b. Setzen Sie das totale Differential von U in den ersten Hauptsatz, Gleichung (2) ein, stellen Sie nach δQ um und „teilen“ Sie durch $\mathrm{d}T$. Was erhalten Sie für (4 P.)

$$C = \left(\frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}\right) \ ? \tag{3}$$

c. Hält man bei der Bestimmung der Wärmekapazität das Volumen konstant (isochor), so erhält man

$$C_V = \left(\frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}\right)_V \ . \tag{4}$$

Leiten Sie diese Größe her (4 P.).

d. Die entsprechende Größe bei konstantem Druck (isobar) heißt

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}\right)_p \ . \tag{5}$$

Was erhalten Sie dafür (4 P.)?

e. Für das ideale Gas sind die innere Energie sowie der Zusammenhang zwischen p, V und T für einatomige Gase aus der Vorlesung bekannt. Bestimmen Sie C_V und C_p für diesen Spezialfall. Ermitteln Sie ebenfalls die Größe

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} \ , \tag{6}$$

die auch adiabatischer Exponent bzw. Index genannt wird (6 P.).

2.2 Zweiniveausystem im kanonischen Ensemble (22 P.)

Ein Quantensystem habe zwei Energieniveaus mit Energien $E_1 < E_2$.

a. Stellen Sie die Zustandssumme auf (2 P.).

b. Berechnen Sie die innere Energie U und stellen Sie U als Funktion von $k_B T/\Delta$ (schematisch) dar. Dabei sei $\Delta = E_2 - E_1$ (4 P.).

c. Gegen welche Werte geht U für $T \to 0$ sowie für $T \to \infty$ (2 P.).

d. Berechnen Sie die Wärmekapazität C und stellen Sie C/k_B als Funktion von $k_B T/\Delta$ (schematisch) dar (6 P.).

e. Gegen welche Werte geht C für $T \to 0$ sowie für $T \to \infty$ (2 P.).

f. Definieren die Besetzungswahrscheinlichkeiten (bzw. Besetzungszahlen) der beiden Niveaus und stellen sie diese als Funktion von $k_B T/\Delta$ (schematisch) dar. Diskutieren Sie das Verhalten insbesondere für $T \to 0$ sowie für $T \to \infty$ (6 P.).

2.3 Gleichverteilungssatz (22 P.)

a. Wie lautet der Gleichverteilungssatz der klassischen statistischen Mechanik (6 P.)?

b. Wie lautet die innere Energie des klassischen idealen Gases aus N Punktteilchen in drei Raumdimensionen? Begründen Sie (3 P.).

c. Wie lautet die Wärmekapazität eines Systems aus N unabhängigen klassischen harmonischen Oszillatoren? Die Kreisfrequenzen für die Schwingungen in die drei Raumdimensionen seien ω_x, ω_y und ω_z. Begründen Sie das Ergebnis (3 P.).

d. Erläutern Sie qualitativ, was sich ändert, wenn die Oszillatoren quantenmechanischer Natur sind. Nutzen Sie eine Skizze des funktionalen Verlaufs der Wärmekapazitäten als Funktion der Temperatur (4 P.).

e. Wie lautet die kanonische Zustandssumme für einen eindimensionalen quantenmechanischen Oszillator? Vereinfachen Sie soweit wie möglich (6 P.).

3 Weiterdenken

3.1 Zweidimensionales Fermigas (16 P.)

Betrachten Sie analog zur Vorlesung ein zweidimensionales Fermigas aus Fermionen mit einem Spin $s = 1/2$. Die Abmessung des Systems betrage $L \times L$, die Eigenzustände sollen periodische Randbedingungen am Rand der Zelle erfüllen.

a. Geben Sie den Hamiltonoperator des Systems sowie seine Eigenwerte an. Durch welche Quantenzahlen lassen sich die Eigenvektoren charakterisieren (6 P.)?

b. Skizzieren Sie in einem zweidimensionalen Koordinatensystem die erlaubten $\vec{k}$-Quantenzahlen und begründen Sie, welche Fläche die im Grundzustand besetzten $\vec{k}$-Quantenzahlen für große N in guter Näherung bilden (4 P.).

c. Berechnen Sie ε_F als Funktion der Dichte $\rho = N/L^2$ (6 P.).

Es können 115 Punkte erreicht werden.

Noten

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow 5.0$
- $51 \leq P \leq 55 \Rightarrow 4.0$
- $56 \leq P \leq 60 \Rightarrow 3.7$
- $61 \leq P \leq 65 \Rightarrow 3.3$
- $66 \leq P \leq 70 \Rightarrow 3.0$
- $71 \leq P \leq 75 \Rightarrow 2.7$
- $76 \leq P \leq 80 \Rightarrow 2.3$
- $81 \leq P \leq 85 \Rightarrow 2.0$
- $86 \leq P \leq 90 \Rightarrow 1.7$
- $91 \leq P \leq 95 \Rightarrow 1.3$
- $96 \leq P \leq \infty \Rightarrow 1.0$

Viel Erfolg!