

Aufgabenblatt 7

7.1 Newton-Verfahren (Abgabe 29.05.2023)

Das Newton-Raphson-Verfahren ist eine Iterationsmethode zur näherungsweisen Nullstellensuche bei differenzierbaren Funktionen f . Die Iterationsvorschrift lautet wie folgt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (1)$$

1. Formulieren Sie auf dem Papier einen Algorithmus der die Nullstellen einer differenzierbaren Funktion f mit dem Newton-Verfahren näherungsweise berechnet. Die Algorithmus-Eingaben sind $f(x)$, $f'(x)$, Startwert x_0 , und Genauigkeitsvorgabe ξ , wobei der Algorithmus terminiert wenn $|x_{n+1} - x_n| < \xi$.
2. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^4 + 3x^3 - x - 10$. Führen Sie die ersten vier Iterationsschritte "per Hand" aus und schreiben Sie die Werte in eine Tabelle (x_n vs. $|x_{n+1} - x_n|$). Wählen Sie als Startwert $x_0 = 2$.
3. Entwickeln Sie ein Python-Programm, welches dieses Verfahren implementiert. Geschickt wäre es, wenn Sie die Funktion und ihre Ableitung in ein Unterprogramm stecken. Dann bräuchten Sie nur das Unterprogramm zu wechseln, wenn Sie eine andere Funktion untersuchen wollen.
4. Finden Sie jetzt mit dem von Ihnen geschriebenen Programm die Nullstelle von $f(x) = \tan(x) - \sqrt{x}$ im Intervall $(0, 1.5]$.

7.2 Perigäum und Apogäum

Schreiben Sie ein Programm zur Bestimmung der Umkehrpunkte (r_{\min} und r_{\max}) der Bewegung einer Punktmasse im Zentralpotential mit konstanter Energie E . Dafür benötigen Sie (a) eine Funktion, die das äquivalente eindimensionale Potential V_{eff} in Abhängigkeit des Radius r berechnet (Theoretische Physik I) und (b) ein Unterprogramm, das die Nullstellen von $E - V_{\text{eff}}$ findet. Benutzen Sie hierfür das Bisektions-Verfahren oder die regula falsi.

Testen Sie Ihr Programm an dem folgenden Beispiel der Bewegung eines Satelliten im Schwerfeld der Erde: Das Gravitationspotential ist gegeben durch $V(r) = -GMm/r$. Aus messtechnischen Gründen ist GM genauer bekannt als die Einzelterme G (Gravitationskonstante) und M (Erdmasse); der genaue Zahlenwert ist $GM = 3.9860042 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$. Ein Satellit hat die Masse $m = 1000 \text{ kg}$, den Drehimpuls $L = 68.8 \cdot 10^{12} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ und eine Energie von $E = -1.2 \cdot 10^{10} \text{ J}$. Berechnen Sie nun sein Perigäum und Apogäum (den erdnächsten und erdfernten Punkt). Was passiert mit dem Satelliten, wenn der Drehimpuls $L = 57.3 \cdot 10^{12} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ bzw. $L = 81.35 \cdot 10^{12} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ beträgt?

7.3 Vergleich unterschiedlicher Verfahren zur Nullstellensuche

Zuhause haben Sie schon die Nullstelle von $f(x) = \tan(x) - \sqrt{x}$ im Intervall $(0, 1.5]$ mit dem Newton-Raphson-Verfahren bestimmt.

Schreiben Sie jetzt ein Programm, das die Nullstelle mit dem Bisektions-Verfahren oder der regula falsi bestimmt und vergleichen Sie die Zahl der nötigen Schritte bei gleicher geforderter Genauigkeit des Ergebnisses. Benutzen Sie den Startwert $x_0 = 0.6$.