

Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Kernphysik WS 2022/2023	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de
--	----------------------------	---

Aufgabenblatt 10 – Weihnachtszettel

10.1 Paritätserlaubte α -Zerfälle

Beim α -Zerfall wird ein ${}^4\text{He}$ -Kern im Zustand 0^+ emittiert. Der Ausgangskern sei im Zustand $J_i^{\pi_i}$, der Produktkern im Zustand $J_f^{\pi_f}$. α -Teilchen und Produktkern haben eine relativen Bahndrehimpuls¹ mit der Drehimpulsquantenzahl L . Die zu L gehörende Paritätsänderung beträgt $(-1)^L$.

Bei der Betrachtung dieser Zerfälle geht es u.a. darum, ob eine Kopplung $J_i^{\pi_i} + 0^+ + L^{(-1)^L}$ zu $J_f^{\pi_f}$ möglich ist. Beachten Sie, dass die Parität eine multiplikative Quantenzahl ist.

- Wiederholen Sie, wie man Spins koppelt!** 😊
- Koppeln Sie einen Spin $s = 7/2$ mit einem Spin $s = 3/2$. Welche Gesamtspins können resultieren? Überprüfen Sie die Dimensionen des Produkthilbertraumes und die Summe der Dimensionen der Hilberträume zu dem Gesamtspins. Das sollte gleich sein.
- Koppeln Sie drei Spins $s = 2$. Welche Gesamtspins können resultieren? Überprüfen Sie die Dimensionen des Produkthilbertraumes und die Summe der Dimensionen der Hilberträume zu dem Gesamtspins. Das sollte gleich sein. Doch Vorsicht, hier treten manche Gesamtspins mehrfach auf.
- In welche Zustände $J_f^{\pi_f}$ kann ein 0^+ -Kern über den α -Zerfall zerfallen? Geben Sie eine analytische Formel an.
- Kann ein 2^+ -Kern in einen 3^+ -Kern zerfallen? Begründen Sie.
- Erklären Sie zur Wiederholung, dass der angeregte 1^+ -Zustand des ${}^{20}\text{Ne}$ über den α -Zerfall in den angeregten 3^- -Zustand des ${}^{16}\text{O}$ zerfallen kann, nicht aber in den 0^+ -Grundzustand.

¹Das geht, weil der Ausgangskern kein Punktteilchen ist.

10.2 Translationsoperator

In der Quantenmechanik und auch in der Kernphysik spielen Symmetrien eine wichtige Rolle. Als Beispiel sei im Folgenden die Translationssymmetrie (in einer Dimension) betrachtet. Dazu definiert man den folgenden Operator:

$$\underline{T}_a = e^{-\frac{i}{\hbar} a \underline{P}}. \quad (1)$$

- Begründen Sie, dass \underline{T}_a unitär ist.
- Wie wirkt \underline{T}_a auf einen Zustand $|\phi\rangle$? Untersuchen Sie dies am besten in Ortsdarstellung. Es kann günstig sein, zur Umformung die Fouriertransformation zu verwenden.
- Was ist $\underline{T}_a \underline{x} \underline{T}_a^\dagger$?
- Wie wirkt

$$\underline{T}_a^{(\text{tot})} = e^{-\frac{i}{\hbar} a \underline{P}}, \quad \underline{P} = \sum_k \underline{p}_k \quad (2)$$

auf $\underline{x}_m - \underline{x}_n$, d.h., was ist $\underline{T}_a^{(\text{tot})}(\underline{x}_m - \underline{x}_n) \left(\underline{T}_a^{(\text{tot})}\right)^\dagger$?

- Welche Größe ist erhalten, wenn $[\underline{H}, \underline{T}_a^{(\text{tot})}] = 0$ gilt?

10.3 Wismut AG

Vielen Menschen ist vermutlich gar nicht bewusst, dass Deutschland Uranlagerstätten hat, in denen über längere Zeiträume Uran abgebaut worden ist. Einen interessanten historischen Aspekt bildet dabei die Wismut AG (später SDAG Wismut), die auf dem Gebiet der sowjetischen Besatzungszone und späteren DDR Uranerz für die Sowjetunion abbaute.

Informieren Sie sich z.B. bei wikipedia über die Wismut AG sowie die Lage der Lagerstätten und über den Rückbau. Letzteres ist auch auf den Webseiten der Wismut GmbH nachzulesen, die den Rückbau betreibt.

- Nennen Sie einige Abbauorte und verorten Sie diese auf einer Landkarte.
- Welche Menge Uran wurde zwischen 1946 und 1990 in etwa abgebaut?
- Welches waren bis 1990 die weltweit vier größten Uranproduzenten?
- Welches sind die beiden Hauptursachen für strahleninduzierten Lungenkrebs?
- Was verstand man unter „Kumpeltod“?

10.4 Zusatzaufgabe: Nachweis Paritätsverletzung durch Wu

Lesen Sie den Artikel von C. S. Wu in Phys. Rev. **105**, 1413 (1957) über die Verletzung der Paritätserhaltung.

Die folgende Aufgabe hat zwar nichts mit der Paritätsverletzung zu tun, wohl aber mit der experimentellen Realisierung. In dem Experiment wird eine adiabatische Magnetisierungskühlung verwendet. Das können Sie sich wie folgt klar machen:

Wir betrachten das kanonische Ensemble nichtwechselwirkender Spins $s = 1/2$, d.h., es reicht, einen davon zu betrachten. Der Hamiltonoperator lautet

$$\tilde{H} = \frac{g\mu_B}{\hbar} B \tilde{s}^z . \quad (3)$$

Daraus können Sie die Zustandssumme berechnen:

$$Z(T, B) = \text{Sp} \left(\exp \left[-\beta \tilde{H} \right] \right) , \beta = \frac{1}{k_B T} . \quad (4)$$

In diesem Ausdruck kommt am Ende kein \hbar mehr vor, und die anderen Konstanten können als $g\mu_B/k_B = 1.3434 \text{ K/T}$ ($T \equiv \text{Tesla}$) zusammengefasst werden.

Für diejenigen, die noch keine Theorie III gehört haben, sei die Zustandssumme hier noch einmal weiterentwickelt. Wenn man die Eigenwerte E_k von \tilde{H} kennt, und die kennen Sie, dann wird aus (4)

$$Z(T, B) = \sum_k \exp[-\beta E_k] . \quad (5)$$

Aus der Zustandssumme kann über das thermodynamische Potential G die Entropie berechnet werden

$$G(T, \vec{B}) = -k_B T \ln \left[Z(T, \vec{B}) \right] , \quad S(T, \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial T} G(T, \vec{B}) . \quad (6)$$

- Stellen Sie die Entropie $S(T, B)$ in einem $T - B$ -Diagramm z.B. als Contourplot (Höhenlinien) dar. Wenn man jetzt ausgehend von einem Punkt (T_0, B_0) das Magnetfeld adiabatisch ausschaltet, kühlt sich das System ab. Machen Sie sich das an Ihrer Graphik klar.
- Ausgehend von der alternativen Formel $S = -k_B \text{Sp}(\tilde{R} \ln(\tilde{R}))$ mit $\tilde{R} = \exp \left[-\beta \tilde{H} \right] / Z$ kann man eine anschauliche Erklärung für die Form der Adiabaten von Paramagneten geben. Wie?
- Informieren Sie sich, auf welche Temperaturen man einen Festkörper mittels adiabatischer Entmagnetisierung abkühlen kann.