

| | | |
|--|-----------------------------------|---|
| Universität Bielefeld Fakultät für Physik | Theoretische Physik II SS 2021 | Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de |
|--|-----------------------------------|---|

Aufgabenblatt 12: Abgabe 05.07.2021

12.1 Wechselwirkung zwischen drei Spins

Wir betrachten drei Spins mit je $s = 1$. Ihre effektive Spin-Spin-Wechselwirkung werde durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben:

$$\tilde{H} = -\frac{2J}{\hbar^2} \left(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 \right). \quad (1)$$

- Bestimmen Sie die Energieeigenwerte dieses Hamiltonoperators sowie deren Entartung. Hinweis: Sie können den Hamiltonoperator durch quadratische Ergänzung nutzbringend umformen. Zur Berechnung der Entartung ist eine Betrachtung der Kopplungsmöglichkeiten hilfreich.
- Nehmen Sie jetzt die Wechselwirkung mit einem äußeren homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ hinzu:

$$\tilde{H}_{\text{Zeeman}} = \frac{g \mu_B}{\hbar} \vec{B} \cdot \vec{\tilde{S}}. \quad (2)$$

Hierbei ist $\vec{\tilde{S}}$ der Gesamtspin. Stellen Sie die Energieeigenwerte des Gesamthamiltonoperators als Funktion des äußeren Feldes B graphisch dar.

c. **Zusatzaufgabe: 5 Extrapunkte**

Der Spin ist der Generator der Drehungen. Was ist

$$\exp\left\{-i\frac{\alpha s_z}{\hbar}\right\} \vec{s} \exp\left\{i\frac{\alpha s_z}{\hbar}\right\} \quad (3)$$

für einen einzelnen Spin? Sie können das Ergebnis herleiten, indem Sie das Hadamard-Lemma (bzw. die Liesche Entwicklungsformel) nutzen

$$\exp\{\tilde{A}\} \tilde{B} \exp\{-\tilde{A}\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} [\tilde{A}, \tilde{B}]_m. \quad (4)$$

Dabei ist

$$[\tilde{A}, \tilde{B}]_m = [\tilde{A}, [\tilde{A}, \tilde{B}]_{m-1}] \quad (5)$$

und

$$[\tilde{A}, \tilde{B}]_0 = \tilde{B}. \quad (6)$$

Ordnen Sie die Reihe geschickt um und fassen Sie diese wieder zusammen (zumal Sie ja wissen, was rauskommen muss).

d. **Zusatzaufgabe: 2 Extrapunkte**

Weshalb dreht jetzt der Gesamtspinoperator alle Spins gleichzeitig? Schreiben Sie das doch einfach mal für ein System aus zwei Spins hin, dann sehen Sie das sofort, wenn Sie sich daran erinnern, wer mit wem vertauscht.