Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik II SS 2021	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 11: Abgabe 28.06.2021

11.1 Grundzustand im H-Atom

a. Überprüfen Sie, ob der folgende Ansatz Lösung der stationärer Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom ist, indem Sie den Ansatz für die Wellenfunktion in die stationäre Schrödingergleichung einsetzen:

$$\psi(\vec{x}) \quad = \quad \mathrm{e}^{-\kappa|\vec{x}|} \ , \qquad |\vec{x}| = r \ , \qquad \kappa > 0 \ . \tag{1}$$

Nutzen Sie Symmetrien. Wie lautet der Energieeigenwert? Wie groß ist der Bahndrehimpuls?

b. Bestimmen Sie die Normierungskonstante.

c. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Elektron innerhalb des Bohrschen Radius a anzutreffen. Berechnen Sie ebenfalls die Wahrscheinlichkeiten für $2a$ und $3a$.

d. Berechnen Sie den Erwartungswert des Radius $\langle \underset{\sim}{r} \rangle$ sowie den Erwartungswert $\langle \underset{\sim}{r}^2 \rangle$.

e. Vergleichen Sie die Größenordnungen von $\sqrt{\langle \underset{\sim}{r}^2 \rangle - \langle \underset{\sim}{r} \rangle^2}$ und $\langle \underset{\sim}{r} \rangle$.

11.2 Wasserstoff-Problem II

a. Zeigen Sie, dass der Bohr-Radius den wahrscheinlichsten Wert des Elektron-Proton-Abstandes darstellt, d.h. Maximum der Funktion $r^2 R_{10}^2(r)$ ist. Warum betrachtet man eigentlich diese Funktion und nicht $R_{10}^2(r)$?

b. Bestimmen Sie den minimalen (klassischen Wert) des effektiven Potentials

$$V_{\text{eff}}(r) \quad = \quad -\frac{\epsilon^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \tag{2}$$

für $l = 1, 2, 3, \dots$ und vergleichen Sie diesen mit den Energieeigenwerten des Wasserstoffatoms. Was lernen wir daraus?

11.3 Zusatzaufgabe: Legendre-Polynome für Freunde der Mathematik

Bei der Herleitung der Kugelflächenfunktion hatten wir die Lösungen der Legendre-Differentialgleichung sowie der verallgemeinerten Legendre-Differentialgleichung nur angegeben.
Erarbeiten Sie sich diese Differentialgleichungen sowie Ihre Lösungen mit Hilfe des Buches Nolting 5/2, S. 26-29 oder des Buches von Pucker und Lang.