Aufgabenblatt 10: Abgabe 21.06.2021

10.1 Bahndrehimpuls

Der Bahndrehimpuls ist wie folgt definiert:

$$\underset{\sim}{\vec{L}} \;=\; \underset{\sim}{\vec{x}} \times \underset{\sim}{\vec{p}}\ . \tag{1}$$

Für $\underset{\sim}{\vec{x}}$ und $\underset{\sim}{\vec{p}}$ gelten die bekannten Vertauschungsrelationen. Schreiben Sie die doch noch einmal für sich hin.

a. Zeigen Sie, dass $\underset{\sim}{\vec{L}}$ hermitesch ist.

b. Leiten Sie den Kommutator $[\underset{\sim}{L}_x, \underset{\sim}{L}_y]$ her.

c. Leiten Sie den Kommutator $[\underset{\sim}{\vec{L}}^2, \underset{\sim}{L}_z]$ her.

d. Leiten Sie den Kommutator $[\underset{\sim}{\vec{x}}^2, \underset{\sim}{L}_z]$ her.

e. Leiten Sie den Kommutator $[\underset{\sim}{\vec{p}}^2, \underset{\sim}{L}_z]$ her.

f. Leiten Sie den Kommutator $[\underset{\sim}{L}^+, \underset{\sim}{L}^-]$ her.

10.2 Der starre Rotator

Eine starre Hantel rotiere im Raum um den Koordinatenursprung, d.h. ihre Freiheitsgrade sind ϑ und ϕ. Diese Bewegung werde durch den Hamiltonoperator

$$\underset{\sim}{H} \;=\; \frac{1}{2J}\underset{\sim}{\vec{L}}^2 \tag{2}$$

beschrieben. Dabei ist J das Trägheitsmoment.

a. Berechnen Sie die Eigenwerte, Eigenfunktionen und eventuellen Entartungsgrade.

b. Der Rotator befinde sich im Zustand $\psi(\vartheta, \phi) = c\{\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta)\cos(2\phi)\}$. Normieren Sie diese Funktion und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten bei einer Messung von $\underset{\sim}{\vec{L}}^2$ die Werte $6\hbar^2$, $2\hbar^2$ oder 0 zu erhalten.
Tipp: Drücken Sie die Winkelfunktionen durch Kugelflächenfunktionen aus.

c. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei Messung von $\underset{\sim}{\vec{L}}^2$ und $\underset{\sim}{L}_z$ das Wertepaar $(6\hbar^2, -2\hbar)$ zu erhalten.

10.3 Kugelflächenfunktionen

Stellen Sie die Kugelflächenfunktionen für $l = 0, 1, 2, 3$ mit Hilfe von Mathematica graphisch dar. Schauen Sie dazu in der Hilfe von `SphericalPlot3D` nach.
Statt Mathematica können Sie auch ein anderes Programm wählen. Was haben Sie genommen? Stellen Sie die Lösung Ihren Kommilitonen zur Verfügung.
Wenn gar nichts funktioniert, schauen Sie sich die Funktionen bei wikipedia an (aber selbst plotten ist besser).

10.4 Korrespondenzprinzip: Produkte von Operatoren

Für Produkte von klassischen Observablen ist es nicht naheliegend oder gar eindeutig, wie der entsprechende quantenmechanische Operator aussieht, wenn die beiden Operatoren nicht kommutieren. Als Beispiel betrachten wir den Operator

$$\underset{\sim}{A} = (1-\alpha)\underset{\sim}{x}\underset{\sim}{p} + \alpha\underset{\sim}{p}\underset{\sim}{x} \;, \quad \alpha \in \mathbb{C} \tag{3}$$

a. Für welche α ist der Operator hermitesch?

b. Berechnen Sie den Erwartungswert des Operators $\underset{\sim}{x}\underset{\sim}{p}$ für ein Gaußsches Wellenpaket als ein Beispiel für einen nicht reellen Erwartungswert.

c. Warum tritt das angesprochene Problem beim Operator des Bahndrehimpulses

$$\underset{\sim}{\vec{L}} = \underset{\sim}{\vec{x}} \times \underset{\sim}{\vec{p}} \tag{4}$$

nicht auf?