Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik II SS 2021	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 9: Abgabe 14.06.2021

9.1 Eindimensionaler Harmonischer Oszillator

Für den eindimensionalen harmonischen Oszillator gilt:

$$\underset{\sim}{H} = \frac{\underset{\sim}{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\underset{\sim}{x}^2 \quad \text{mit} \quad \underset{\sim}{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{a}^\dagger)\ , \underset{\sim}{p} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\frac{(\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{a}^\dagger)}{i}\ . \tag{1}$$

Das sollten Sie auch auswendig können.
Die Energieeigenzustände seien mit $|\, n\, \rangle$ bezeichnet, wobei $n = 0, 1, 2, \ldots$.

a. Wie lautet $\underset{\sim}{H}$ ausgedrückt mit $\underset{\sim}{a}$ und $\underset{\sim}{a}^\dagger$ und wie lauten die Energieeigenwerte von $\underset{\sim}{H}$?

b. Was ist $\underset{\sim}{a}\,|\, n\, \rangle$?

c. Was ist $\underset{\sim}{a}^\dagger\,|\, n\, \rangle$?

d. Was ist $[\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a}^\dagger]$?

e. Berechnen Sie $\langle\, n\,|\, \underset{\sim}{x}\, |\, n\, \rangle$.

f. Berechnen Sie $\langle\, n\,|\, \underset{\sim}{p}\, |\, n\, \rangle$.

g. Berechnen Sie $\langle\, n\,|\, \underset{\sim}{x}^2\, |\, n\, \rangle$.

h. Berechnen Sie $\langle\, n\,|\, \underset{\sim}{p}^2\, |\, n\, \rangle$.

i. Für den ersten angeregten Zustand des harmonischen Oszillators berechne man die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im klassisch verbotenen Bereich. Das Ergebnis ist eine Zahl.

j. Für die folgende Linearkombination aus Grundzustand und erstem angeregten Zustand, $|\, \Psi(t = 0)\, \rangle = 1/\sqrt{2}(\ |\, 0\, \rangle + \ |\, 1\, \rangle)$, berechne man formelmäßig die Zeitentwicklung des mittleren Ortes sowie des mittleren Impulses.

k. Zusatzaufgabe: Überprüfen Sie, ob Ihre Lösung von j für den Ortserwartungswert das Ehrenfest-Theorem erfüllt.

l. Zusatzaufgabe: Stellen Sie die Zeitentwicklung von $\langle\, x\,|\, \Psi(t = 0)\, \rangle = 1/\sqrt{2}(\langle\, x\,|\, 0\, \rangle + \langle\, x\,|\, 1\, \rangle)$ graphisch, z.B. mit Mathematica, dar.

9.2 Nützliche Relationen

a. Zeigen Sie, dass für drei Operatoren $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}$ gilt $[\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}] = \underset{\sim}{A}[\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}] + [\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{C}]\underset{\sim}{B}$.

b. Baker-Campbell-Haussdorff-Formeln: Wenn für zwei Operatoren $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}$ gilt, dass

$$[\underset{\sim}{A}, [\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}]] \quad = \quad 0 \tag{2}$$

und

$$[\underset{\sim}{B}, [\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}]] \quad = \quad 0 \ , \tag{3}$$

dann gilt auch

$$\exp\left\{\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}\right\} \quad = \quad \exp\left\{\underset{\sim}{A}\right\} \exp\left\{\underset{\sim}{B}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}\,[\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}]\right\} \tag{4}$$

und

$$\exp\left\{\underset{\sim}{A}\right\} \exp\left\{\underset{\sim}{B}\right\} \quad = \quad \exp\left\{\underset{\sim}{B}\right\} \exp\left\{\underset{\sim}{A}\right\} \exp\left\{[\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}]\right\} \ . \tag{5}$$

Überprüfen Sie die Voraussetzungen (2) und (3) für die Operatoren $\underset{\sim}{x}$ und $\underset{\sim}{p}$ und merken Sie sich die Baker-Campbell-Haussdorff-Formeln.