

## Aufgabenblatt 6: Abgabe 24.05.2021

### 6.1 Spinpräzession

Ein Spin bewege sich im homogenen Magnetfeld  $\vec{B} = B \vec{e}_z$ .

- Geben Sie den Hamiltonoperator und seine Spektraldarstellung an.
- Ein Spin mit  $s = 1/2$  sei zur Zeit  $t = 0$  im Zustand  $|s_x+\rangle$  präpariert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, den Spin zur Zeit  $t$  im Zustand  $|s_x+\rangle$  bzw.  $|s_x-\rangle$  zu finden.
- Auflösung der Diskussion zur Rolle der Spinpräzession beim Stern-Gerlach-Versuch: Ein Spin mit  $s = 1/2$  sei zur Zeit  $t = 0$  im Zustand  $|s_x+\rangle$  präpariert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, den Spin zur Zeit  $t$  im Zustand  $|s_z+\rangle$  bzw.  $|s_z-\rangle$  zu finden. Wie lautet Ihre Erkenntnis?
- Ändert sich an der Erkenntnis des letzten Punktes etwas, wenn  $\vec{B} = B(\vec{x}) \vec{e}_z$ , d.h., wenn der Betrag der magnetischen Induktion vom Ort abhängt (inhomogen), die Richtung aber stets entlang  $\vec{e}_z$  ist?
- Ein Spin mit  $s = 1/2$  sei zur Zeit  $t = 0$  im Zustand  $|s_x+\rangle$  präpariert. Berechnen Sie das Zeitverhalten der Erwartungswerte von  $\tilde{s}_x$ ,  $\tilde{s}_y$  und  $\tilde{s}_z$ .
- Für einen beliebigen Spin mit Spinquantenzahl  $s$  laute der Erwartungswert des Spinoperators zur Zeit  $t = 0$

$$\langle \Psi(0) | \tilde{s} | \Psi(0) \rangle = \vec{s}_0 . \quad (1)$$

Berechnen Sie den Erwartungswert von  $\tilde{s}$  für beliebige Zeiten  $t$ .

### 6.2 Zeitentwicklung von Erwartungswerten

$\tilde{H}$  und  $\tilde{B}$  seien nicht explizit zeitabhängige Operatoren.

- Für die Zeitentwicklung eines Erwartungswertes gilt:

$$\langle \Psi(t) | \tilde{B} | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(t_0) | e^{\left\{ \frac{i \tilde{H}(t-t_0)}{\hbar} \right\}} \tilde{B} e^{\left\{ -\frac{i \tilde{H}(t-t_0)}{\hbar} \right\}} | \Psi(t_0) \rangle . \quad (2)$$

Beweisen Sie ausgehend von Gleichung (2), dass der Erwartungswert erhalten bleibt, wenn  $\tilde{B}$  mit  $\tilde{H}$  vertauscht. Bedenken Sie dazu, wie die Funktion eines Operators definiert war.

- Diese Aussage kann man natürlich auch beweisen, wenn man die Zeitableitung von  $\langle \Psi(t) | \tilde{B} | \Psi(t) \rangle$  betrachtet. Wie lautet diese? Begründen Sie jetzt die Erhaltung des Erwartungswertes  $\langle \Psi(t) | \tilde{B} | \Psi(t) \rangle$ .

### 6.3 Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Aus dem System von Potenzfunktionen  $|f_n\rangle$  mit  $\{f_n(x) = \langle x | f_n \rangle = x^n |n = 0, 1, 2, \dots\}$  lässt sich in  $C^0([a, b], \mathbb{C})$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b dx f^*(x) g(x) \quad (3)$$

nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren ein Orthogonalsystem von Polynomen bilden. Für den hier betrachteten Fall seien  $a = -1$  und  $b = 1$ .

Bestimmen Sie die ersten vier orthogonalen Polynome  $|g_n\rangle, n = 0, 1, 2, 3$  sowie ihre Ortsdarstellung.

### 6.4 Zusatzaufgabe: Ofen beim Stern-Gerlach-Versuch

Wie beschreibt man eigentlich den Zustand der Silberatome, wenn sie aus dem Ofen austreten? Wäre es korrekt, den Zustand durch einen Zustandsvektor wie z.B.

$$|\phi_o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |s_z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |s_z-\rangle \quad (4)$$

zu beschreiben? Begründen Sie.

In der Vorlesung Theoretische Physik III werden Sie lernen, dass man den Zustand der austretenden Silberatome durch einen statistischen Operator

$$\tilde{R} = \frac{1}{2} ( |s_z+\rangle\langle s_z+| + |s_z-\rangle\langle s_z-| ) = \sum_n p_n \tilde{P}_n \quad (5)$$

beschreibt. Dieser ist eine Summe aus Wahrscheinlichkeiten  $p_n$  und ihren zugehörigen Projektoren  $\tilde{P}_n$ .

Überprüfen Sie, ob diese Beschreibung die richtigen Ergebnisse für die folgenden beiden Messergebnisse liefert:

$$p(s_z+) = \langle s_z+ | \tilde{R} | s_z+ \rangle \quad (6)$$

$$p(s_x+) = \langle s_x+ | \tilde{R} | s_x+ \rangle . \quad (7)$$

## 6.5 Selbsttest Wissensstand

Liebe Studentinnen und Studenten,  
heute möchte ich Ihnen einen Selbsttest über den ersten Abschnitt der Vorlesung anbieten.  
Versuchen Sie einfach, für sich selbst die Antworten hinzuschreiben, dann sehen Sie, wo Sie  
gerade stehen. Mir liegt sehr daran, dass Sie dran bleiben und nicht verloren gehen.

- a. Was können Sie zu Hilbertraum, Zustand, hermitescher Operator, Observable, Darstellung, Vollständigkeitsrelation und Spektraldarstellung sagen?
- b. Was ist eine Messung?
- c. Warum sagt man, dass die Quantenmechanik Wahrscheinlichkeitsaussagen macht?
- d. Wie lauten die Kommutatorrelationen für Drehimpulse?
- e. Wie lauten die Eigenwertgleichungen für Drehimpulse?
- f. Wie lautet die zeitabhängige Schrödingergleichung?
- g. Wie lautet die stationäre Schrödingergleichung?
- h. In der Quantenmechanik gibt es zwei Arten von Zeitentwicklung, die der zeitabhängigen Schrödingergleichung und diejenige, die bei Messungen abläuft. Machen Sie sich klar, dass dies philosophisch unbefriedigend ist. Verwenden Sie dabei Begriffe wie *deterministisch* und *zufällig*.