Universität Bielefeld	Theoretische Physik II	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	SS 2021	jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 5: Abgabe 17.5.2021

5.1 Hermitesche Operatoren

a. Geben Sie die Definition für einen hermiteschen Operator an und benennen Sie die auftretenden Größen.

b. Beweisen Sie, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell sind. Betrachten Sie dazu die Differenz aus

$$\langle\, a_m \,|\, \underset{\sim}{A} \,|\, a_n \,\rangle = a_n \langle\, a_m \,|\, a_n \,\rangle \tag{1}$$

und

$$\langle\, a_m \,|\, \underset{\sim}{A}^\dagger \,|\, a_n \,\rangle = a_m^* \langle\, a_m \,|\, a_n \,\rangle \ . \tag{2}$$

Die Vektoren $|\, a_n \,\rangle$ seien die Eigenzustände von $\underset{\sim}{A}$. Begründen Sie zuerst, warum (1)und (2) gelten.

c. Beweisen Sie, dass die Eigenvektoren eines hermiteschen Operators, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, orthogonal sind. Dazu können Sie die schon berechnete Differenz benutzen.

d. Geben Sie einen physikalischen Grund an, warum es konsistent ist, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell sind.

e. Wie lautet die Spektraldarstellung eines hermiteschen Operators $\underset{\sim}{A}$, der Eigenwerte a_n und Eigenzustände $|\, a_n \,\rangle$ besitzt?

5.2 Spin $s = 1$

Leiten Sie für einen Spin $s = 1$ die Darstellungen der drei Spinkomponenten $\underset{\sim}{s}_x, \underset{\sim}{s}_y, \underset{\sim}{s}_z$ in der Eigenbasis von $\underset{\sim}{s}_z$ her. Verwenden Sie dabei

a. die Eigenwertgleichungen für den Spin,

b. den Zusammenhang zwischen $\underset{\sim}{s}_x, \underset{\sim}{s}_y$ und $\underset{\sim}{s}^+, \underset{\sim}{s}^-$,

c. sowie

$$\underset{\sim}{s}^\pm \,|\, s\ m \rangle \;=\; \hbar\, \sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1)}\, |\, s\ m \pm 1 \,\rangle \ . \tag{3}$$

5.3 Stern-Gerlach-Versuch mit polarisiertem Licht

Wiederholen Sie die aus der Vorlesung bekannte Analogie zwischen den Stern-Gerlach-Experimenten mit Magnetfeldern in z- und x-Richtung sowie Polarisatoren in x- bzw. y-Richtung sowie in die um $45°$ geneigten Richtungen x' und y'.
Zirkular polarisiertes Licht kann nun als Analogon für den dritten möglichen Stern-Gerlach-Versuch, in y-Richtung, dienen. Man unterscheidet dabei die beiden Polarisationen im Uhrzeigersinn (rechts-zirkular) und entgegen dem Uhrzeigersinn (links-zirkular).

a. Geben Sie die Formel für die elektrische Feldstärke von zirkular polarisiertem Licht an, welches in z-Richtung fortschreitet. Stellen Sie das Ergebnis mittels Phasenverschiebung dar und geben Sie ebenfalls an, wie die komplexe Schreibweise lautet. Schauen Sie in Ihrer Mitschrift aus TP 1 oder im Nolting, Band 3, Abschnitt 4.3.3 nach, wie das geht. Erklären Sie die Formeln kurz.

b. In der Elektrodynamik lässt man oft komplexe Gleichungen und Größen zu. Was muss man dazu sagen oder wissen?

c. Welches Ergebnis erhält man, wenn das Licht in einem horizontalen Polarisator polarisiert wird (x-Richtung) und anschließend einen Filter für links-zirkular polarisiertes Licht durchläuft? Welches Ergebnis würde man bei einem Filter für rechts-zirkular polarisiertes Licht erhalten? Begründen Sie.

d. Stellen Sie sich jetzt vor, das Licht durchläuft zuerst einen horizontalen Polarisator (x-Richtung), sodann einen Polarisator für rechts-zirkular polarisiertes Licht und wird dann zum einen mit einem vertikalen Filter (y-Richtung) zum anderen mit einem horizontalen Filter (x-Richtung) analysiert. Erklären Sie die Ergebnisse.

5.4 Zusatzaufgabe: Eigenwerte und Eigenvektoren

In der Quantenmechanik müssen oft Matrizen zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren diagonalisiert werden. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix} . \tag{4}$$

Diese Matrix kann numerisch diagonalisiert werden. Dazu sollten Sie Werkzeuge parat haben. Sie können z.B. Mathematica, Maple oder matlab verwenden oder das Problem in einer Programmiersprache wie python lösen. Für Mathematica können Sie bei der Fachschaft einen Aktivierungskey bekommen. Holen Sie sich doch einfach einen und lernen Sie das Programm kennen. Die eingebauten Tutorien und Beispiele sind ziemlich gut.
An der Struktur der Matrix (4) kann man erkennen, dass sich die Diagonalisierung vereinfachen lässt. Können Sie sich vorstellen wie? Begründen Sie Ihre Idee.