Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik II SS 2021	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 4: Abgabe bis 10. 5. 2021

4.1 Eigenwerte und Eigenvektoren von Spinoperatoren

Der Operator $\underset{\sim}{s}_z$ hat für ein Teilchen mit Spin $s = 1/2$ die Eigenzustände $\{\, |\, s_z +\rangle,\ |\, s_z -\rangle \}$. Die Basiszustände bilden eine Orthonormalbasis und seien stets in dieser Reihenfolge durchnummeriert. Alle Ergebnisse dieser Aufgabe können Sie anhand Ihrer Mitschrift überprüfen.

a. Der Operator $\underset{\sim}{s}_x$ hat bezüglich dieser Basis die Darstellung

$$\underset{\sim}{s}_x \equiv \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{1}$$

Schreiben Sie $\underset{\sim}{s}_x$ als Operator unter Zuhilfenahme des äußeren Produkts auf.

b. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix (1). Stellen Sie die Eigenvektoren als Linearkombination der Eigenvektoren zu $\underset{\sim}{s}_z$ dar.

c. Stellen Sie die Eigenvektoren von $\underset{\sim}{s}_z$ als Linearkombination der Eigenvektoren von $\underset{\sim}{s}_x$ (1) dar.

d. Die Vertauschungsrelationen für Spins lautet

$$\left[\underset{\sim}{s}_x, \underset{\sim}{s}_y\right] = i\, \hbar\, \underset{\sim}{s}_z \ . \tag{2}$$

In diesem Ausdruck können die Indizes zyklisch vertauscht werden, d.h. $x \to y \to z \to x$. Da Sie die Darstellungen von $\underset{\sim}{s}_z$ und $\underset{\sim}{s}_x$ kennen, können Sie jetzt in einer Basis Ihrer Wahl (ich empfehle die Eigenbasis zu $\underset{\sim}{s}_z$) die Darstellung von $\underset{\sim}{s}_y$ berechnen.

Schreiben Sie außerdem $\underset{\sim}{s}_y$ als Operator unter Zuhilfenahme des äußeren Produkts der Eigenvektoren zu $\underset{\sim}{s}_z$ auf.

e. Zeigen Sie darstellungsfrei unter Benutzung der Kommutatorrelation (2), dass $\underset{\sim}{\vec{s}}^2$ mit allen drei Komponenten $\underset{\sim}{s}_x$, $\underset{\sim}{s}_y$ und $\underset{\sim}{s}_z$ des Spinvektoroperators vertauscht.

f. Begründen Sie, warum es gereicht hätte, dies nur für eine Komponente zu zeigen.

4.2 Erwartungswerte und Messwahrscheinlichkeiten für Spinkomponenten

Durch eine spezielle Stern-Gerlach-Apparatur sei das System im Zustand

$$|\,\alpha\,\rangle \quad = \quad 0.6\,|\,s_z\,+\rangle + 0.8\,|\,s_z\,-\rangle \tag{3}$$

präpariert.

a. Wie lautet der Erwartungswert des Operators $\underset{\sim}{s}_z$ bezüglich $|\,\alpha\,\rangle$? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten bei einer Messung von $\underset{\sim}{s}_z$ die Komponenten „spin up“ und „spin down“ auf?

b. Wie lautet der Erwartungswert des Operators $\underset{\sim}{s}_y$ bezüglich $|\,\alpha\,\rangle$? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten bei einer Messung von $\underset{\sim}{s}_y$ die Komponenten „spin up“ und „spin down“ auf?

c. Konstruieren Sie eine Stern-Gerlach-Apparatur, mit der der Zustand $|\,\alpha\,\rangle$ präpariert werden kann. Begründen Sie.

4.3 Verkanteter Stern-Gerlach-Versuch

Ein etwas schusseliger Experimentator (Männer! Musste wahrscheinlich schnell gehen wegen der Champions-League!) orientiert seinen Stern-Gerlach-Versuch statt in z-Richtung entlang $\theta = 30, \phi = 30$, wobei θ und ϕ die üblichen Kugelkoordinaten sind, d.h. θ misst die Auslenkung von der positiven z-Achse und ϕ den Drehwinkel in der $x-y$-Ebene entgegen dem Uhrzeigersinn. Der Eingangsstrahl sei im Zustand $|\,s_z\,+\rangle$ präpariert.
Welche Eigenwerte misst der Experimentator und mit welchen Wahrscheinlichkeiten? Und wie ging das Endspiel Bayern gegen Dortmund 2013 aus?

4.4 Unbestimmtheitsrelation

Das Spinsystem ($s = 1/2$) sei im Zustand $|\,\phi\,\rangle = |\,s_z\,+\rangle$.

a. Berechnen Sie

$$\langle\,\left(\underset{\sim}{\Delta} s_x\right)^2\,\rangle \quad = \quad \langle\,\underset{\sim}{s}_x^2\,\rangle - \langle\,\underset{\sim}{s}_x\,\rangle^2\;. \tag{4}$$

b. Überprüfen Sie, ob die Unbestimmtheitsrelation für zwei Observable $\underset{\sim}{A}$ und $\underset{\sim}{B}$ erfüllt ist, wenn $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{s}_x$ und $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{s}_y$ sowie $|\,\phi\,\rangle = |\,s_z\,+\rangle$.

c. Führen Sie die gleiche Überprüfung für $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{s}_x$ und $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{s}_y$ sowie $|\,\phi\,\rangle = |\,s_x\,+\rangle$ durch.

d. Zusatzaufgabe: Welche Formulierungen der Unbestimmtheitsrelation bzw. Unschärferelation kennen Sie z.B. aus den Einführungsvorlesungen oder der Schule? Bitte suchen Sie diese raus und schreiben Sie eine Formulierung auf. Ich möchte das mit Ihnen diskutieren.