Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik II SS 2021	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 3: Abgabe bis 3. 5. 2021

Der mathematische Formalismus der Quantenmechanik hat zwei wichtige Fundamente: die lineare Algebra sowie Differentialgleichungen. Bitte wiederholen Sie unbedingt die lineare Algebra. Das Superpositionsprinzip, welches für das Verständnis der quantenmechanischen Phänomene unumgänglich ist, ist letztlich nichts anderes als Vektoraddition. Die stationäre Schrödingergleichung ist eine Eigenwertgleichung. Zur Interpretation vieler Ergebnisse wird zwischen der Ursprungsbasis und der Eigenbasis hin- und hertransformiert. Wenn Sie hierbei sattelfest sind, haben Sie die Quantenmechanik praktisch schon halb verstanden.

3.1 Darstellung und Koordinatenwechsel

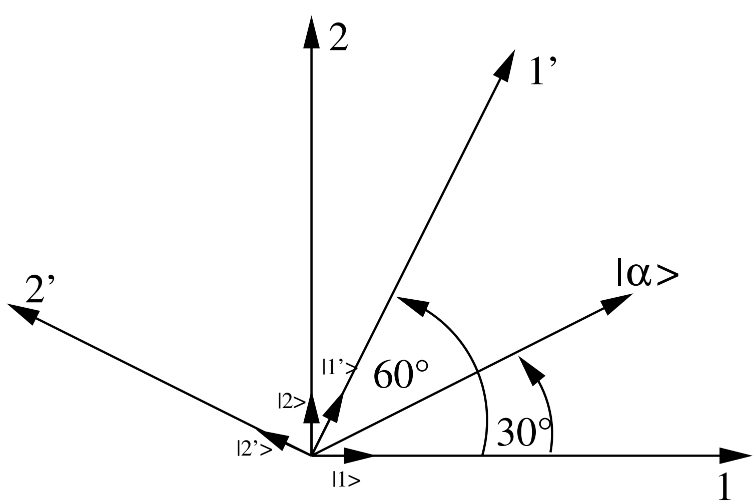
Ein Vektor $|\,\alpha\,\rangle$ liege in einer Ebene. Bezüglich des Koordinatensystems gegeben durch die Orthonormalbasis $\{\,|\,1\,\rangle,\,|\,2\,\rangle\}$ liege er im ersten Quadranten mit einem Winkel von 30^o zur 1-Achse. Der Vektor $|\,\alpha\,\rangle$ habe die Länge 5.

a. Geben Sie die Darstellung des Vektors $|\,\alpha\,\rangle$ bezüglich des Koordinatensystems (ONB) $\{\,|\,1\,\rangle,\,|\,2\,\rangle\}$ an.

b. Ein zweites Koordinatensystem (ONB) $\{\,|\,1'\,\rangle,\,|\,2'\,\rangle\}$ ergebe sich aus dem ersten durch Drehung um 60^o entgegen dem Uhrzeiger. Welche Darstellung hat der Vektor $|\,\alpha\,\rangle$ bezüglich des neuen Koordinatensystems?

c. Versuchen Sie, eine allgemeine Umrechnungsvorschrift von der Darstellung im Koordinatensystem $\{\,|\,1\,\rangle,\,|\,2\,\rangle\}$ in die des Koordinatensystems $\{\,|\,1'\,\rangle,\,|\,2'\,\rangle\}$ anzugeben. Welche Kenntnis benötigt man für eine solche allgemeine Vorschrift?

d. Zusatz: Überlegen Sie im Zusammenhang mit der dritten Aufgabe, was $|\,1\,\rangle\langle\,1\,|$ für ein Objekt ist und was es tut.



3.2 Darstellung einer Abbildung

Ein dreidimensionales Koordinatensystem sei durch eine Orthonormalbasis $\{\, | \phi_1 \rangle, \, | \phi_2 \rangle,$ $| \phi_3 \rangle\}$ gegeben. Die Abbildung $\underset{\sim}{A}$ drehe jeden Vektor um die 3-Achse um den Winkel 45^o entgegen dem Uhrzeiger, d.h. Vektoren des ersten Quadranten in der 1-2-Ebene wandern in Richtung des zweiten Quadranten. Gleichzeitig strecke die Abbildung die Vektoren entlang der 3-Richtung um den Faktor 5.

a. Wie lautet die Darstellung der Abbildung bezüglich der Basis $\{\, | \phi_1 \rangle, \, | \phi_2 \rangle, \, | \phi_3 \rangle\}$?

b. Welcher Vektor ergibt sich, wenn ich die Abbildung auf den Vektor $| \phi \rangle = 1 \, | \phi_1 \rangle + 2 \, | \phi_2 \rangle + 3 \, | \phi_3 \rangle$ anwende?

3.3 Projektionen

Wir betrachten eine Projektion in einem dreidimensionalen Vektorraum, der durch die orthonormalen Basisvektoren $\{\, | 1 \rangle, \, | 2 \rangle, \, | 3 \rangle\}$ aufgespannt wird. Wiederholen Sie zur Vorbereitung die Definition für einen Projektionsoperator.

a. Überprüfen Sie, ob die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

ein Projektor ist. Welche Eigenschaft der Projektoren haben Sie ausgenutzt?

b. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

c. Beschreiben Sie verbal und mathematisch, worauf der Projektor projiziert.

d. Erklären Sie, warum gerade die von Ihnen gefundenen (recht speziellen) Eigenwerte auftreten.

e. Was ist $| 1 \rangle\langle 1 | \, + \, | 2 \rangle\langle 2 |$ für ein Objekt und was tut es?

f. Jetzt Augen zu und durch! Wir betrachten einen unendlich-dimensionalen Vektorraum mit ONB $\{\, | n \rangle, n = 1, 2, \dots\}$. Was ist $\sum_{n=1}^{\infty} | n \rangle\langle n |$ und was tut es?