Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik II SS 2021	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Bitte jede Aufgabe (1.1, 2.1, 2.2, ...) auf einem neuen Blatt. Name, Vorname und Matrikelnummer jeweils nicht vergessen.

1 Wissen

1.1 Quantenmechanik (30 P.)

a. Ein System sei im Zustand $|\,\phi\,\rangle$ präpariert. Die Observable $\underset{\sim}{A}$ soll gemessen werden. Erklären Sie die Messaxiome der Quantenmechanik sowie die Begriffe Erwartungswert und Messwert (5 P.)?

b. Wie lauten der Hamiltonoperator und die Energieeigenwerte des Wasserstoffproblems? Geben Sie die Entartung der Energieniveaus an, wenn man den Spin (und die anderen relativistischen und quantenfeldtheoretischen Korrekturen) nicht berücksichtigt (5 P.)?

c. Das Quantenspinsystem sei im Zustand $|\,s_z\,+\,\rangle$ prapariert. Ein Stern-Gerlach-Versuch misst in x-Richtung. Nennen und begründen Sie die möglichen Ergebnisse der Messung und ihre Wahrscheinlichkeit. Skizze (5 P.).

d. Beschreiben Sie formelmäßig die Zeitentwicklung eines beliebigen Zustandes $|\,\Psi(t)\,\rangle$ für einen beliebigen zeitunabhängigen Hamiltonoperator. Wie lautet allgemein die Spektraldarstellung des Zeitentwicklungsoperators? Wie lautet die allgemeine zeitabhängige Lösung $|\,\Psi(t)\,\rangle$, wenn sich das System zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|\,\Psi(0)\,\rangle$ befunden hat (5 P.)?

e. Drei Drehimpulse $j_1 = 1/2$, $j_2 = 1$ und $j_3 = 3/2$ werden gekoppelt. Welche Gesamtdrehimpulse können auftreten und mit welchen Multiplizitäten? Überprüfen Sie Ihre Rechnung anhand der Dimension des Hilbertraumes (5 P.).

f. Wie lauten der Hamiltonoperator und die Energieeigenwerte des dreidimensionalen anisotropen harmonischen Oszillators (5 P.)?

1.2 Spezielle Relativitästheorie (15 P.)

Eine Rakete der Eigenlänge L_0 fliegt mit konstanter Geschwindigkeit v relativ zu einem Bezugssystem Σ in z-Richtung. Zur Zeit $t = t' = 0$ passiert die Spitze der Rakete den Punkt P_0 in Σ. In diesem Moment wird ein Lichtsignal von der Raketenspitze zum Raketenende gesendet.

a. Nach welcher Zeit erreicht im Ruhesystem der Rakete der Lichtblitz das Ende der Rakete (2 P.)?

b. Zu welchem Zeitpunkt erreicht das Signal das Raketenende im Ruhesystem Σ des Beobachters (10 P.)?

c. Skizze (3 P.).

2 Können

2.1 Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren (15 P.)

Aus dem System von Potenzfunktionen $|\, f_n \,\rangle$ mit $\{f_n(x) = \langle\, x \,|\, f_n \,\rangle = x^n | n = 0, 1, 2, \ldots\}$ lässt sich in $C^0([a,b], \mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle\, f \,|\, g \,\rangle \quad = \quad \int_a^b \mathrm{d}x \; f^*(x)\, g(x) \tag{1}$$

nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren ein Orthogonalsystem von Polynomen bilden. Für den hier betrachteten Fall seien $a = -1$ und $b = 1$.
Bestimmen Sie die ersten vier orthogonalen Polynome $|\, g_n \,\rangle, n = 0, 1, 2, 3$ sowie ihre Ortsdarstellung.

2.2 Gaußsches Wellenpaket (15 P.)

Die Wellenfunktion des Gaußschen Wellenpakets in einer Raumdimension lautet

$$\langle\, x \,|\, \phi \,\rangle \quad = \quad c \exp\left\{ -\frac{(x - x_0)^2}{2a} + i \frac{x p_0}{\hbar} \right\} \; . \tag{2}$$

a, x_0 und p_0 sind dabei reell, $a > 0$.

a. Bestimmen Sie die Normierungskonstante c (5 P.).

b. Berechnen Sie die Erwartungswerte des Ortsoperators und des Impulsoperators, d.h. den mittleren Ort und den mittleren Impuls (10 P.).

3 Weiterdenken

3.1 Kontinuitätsgleichung (20 P.)

Die Wahrscheinlichkeitsdichte, die zu einem quantenmechanischen Zustand $|\,\phi\,\rangle$ gehört, ist im Ortsraum wie folgt definiert:

$$\rho(\vec{x}) \quad = \quad \langle\,\vec{x}\,|\,\phi\,\rangle\langle\,\phi\,|\,\vec{x}\,\rangle\ . \tag{3}$$

a. Leiten Sie die Zeitableitung von $\rho(\vec{x})$ her für einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator, der aus kinetischer und potentieller Enegie besteht (10 P.).

b. Bringen Sie das Ergebnis in die Form einer Kontinuitätsgleichung (5 P.).

c. Welche Erhaltungsgröße steckt hinter dieser Kontinuitätsgleichung (5 P.)?

3.2 Der starre Rotator (25 P.)

Eine starre Hantel rotiere im Raum um den Koordinatenursprung, d.h. ihre Freiheitsgrade sind ϑ und ϕ. Diese Bewegung werde durch den Hamiltonoperator

$$\underset{\sim}{H} \quad = \quad \frac{1}{2J}\underset{\sim}{\vec{L}}^2 \tag{4}$$

beschrieben. Dabei ist J das Trägheitsmoment.

a. Bestimmen Sie die Eigenwerte, Eigenfunktionen und eventuellen Entartungsgrade (5 P.).

b. Der Rotator befinde sich im Zustand $\psi(\vartheta, \phi) = c\{\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta)\cos(2\phi)\}$. Normieren Sie diese Funktion (10 P.).

c. Der Rotator befinde sich im Zustand $\psi(\vartheta, \phi) = c\{\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta)\cos(2\phi)\}$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten bei einer Messung von $\underset{\sim}{\vec{L}}^2$ die Werte $6\hbar^2$, $2\hbar^2$ oder 0 zu erhalten (10 P.).

Tipp: Drücken Sie die Winkelfunktionen durch Linearkombinationen von Kugelflächenfunktionen aus.

$l = 0$: $\quad Y_{00}(\vartheta, \varphi) \equiv \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}$,

$l = 1$: $\quad Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}} \cos\vartheta$,

$\quad Y_{1\pm1}(\vartheta, \varphi) = \mp\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}} \sin\vartheta\, e^{\pm i\varphi}$,

$l = 2$: $\quad Y_{20}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\dfrac{5}{16\pi}} \left(3\cos^2\vartheta - 1\right)$,

$\quad Y_{2\pm1}(\vartheta, \varphi) = \mp\sqrt{\dfrac{15}{8\pi}} \sin\vartheta\cos\vartheta\, e^{\pm i\varphi}$,

$\quad Y_{2\pm2}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\dfrac{15}{32\pi}} \sin^2\vartheta\, e^{\pm i2\varphi}$.

Es können 120 Punkte erreicht werden.

Noten

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow 5.0$
- $51 \leq P \leq 55 \Rightarrow 4.0$
- $56 \leq P \leq 60 \Rightarrow 3.7$
- $61 \leq P \leq 65 \Rightarrow 3.3$
- $66 \leq P \leq 70 \Rightarrow 3.0$
- $71 \leq P \leq 75 \Rightarrow 2.7$
- $76 \leq P \leq 80 \Rightarrow 2.3$
- $81 \leq P \leq 85 \Rightarrow 2.0$
- $86 \leq P \leq 90 \Rightarrow 1.7$
- $91 \leq P \leq 95 \Rightarrow 1.3$
- $96 \leq P \leq \infty \Rightarrow 1.0$

Viel Erfolg!