Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik II SS 2021	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Bitte jede Aufgabe (1.1, 2.1, 2.2, ...) auf einem neuen Blatt. Name, Vorname und Matrikelnummer jeweils nicht vergessen.

1 Wissen

1.1 Quantenmechanik (23 P.)

a. Ein System sei im Zustand $|\,\phi\,\rangle$ präpariert. Die Observable $\underset{\sim}{A}$ soll gemessen werden. Erklären Sie die Messaxiome der Quantenmechanik sowie die Begriffe Erwartungswert und Messwert (5 P.)?

b. Wie lauten die Kommutatorrelationen und Eigenwertgleichungen für Drehimpulse? Welche Werte können die zugehörigen Quantenzahlen ganz allgemein annehmen (5 P.)?

c. Wie lautet die allgemeine Unbestimmtheitsrelation? Erläutern Sie die vorkommenden Größen (3 P.).

d. Durch eine spezielle Stern-Gerlach-Apparatur sei das Spin-1/2-System im Zustand $|\,\alpha\,\rangle = 0.8\,|\,s_z\,+\rangle - 0.6\,|\,s_z\,-\rangle$ präpariert. Ist $|\,\alpha\,\rangle$ normiert? Wie lautet der Erwartungswert des Operators $\underset{\sim}{s}_z$ bezüglich $|\,\alpha\,\rangle$ (5 P.)?

e. Drei Drehimpulse $j_1 = 1$, $j_2 = 2$ und $j_3 = 3$ werden gekoppelt. Welche Gesamtdrehimpulse können auftreten und mit welchen Multiplizitäten? Überprüfen Sie Ihre Rechnung anhand der Dimension des Hilbertraumes (5 P.).

1.2 Spezielle Relativitästheorie (16 P.)

a. Skizzieren Sie den Lichtkegel, erläutern Sie die Begriffe zeitartig, raumartig, lichtartig, zeichnen Sie diese ein und erklären Sie die Möglichkeit kausaler Zusammenhänge im raum- bzw. zeitartigen Bereich (6 P.)?

b. Σ und Σ' seien zwei Inertialsysteme. Σ' bewege sich relativ zu Σ mit der Geschwindigkeit v in z-Richtung. Zur Zeit $t = t' = 0$ sei $\Sigma = \Sigma'$. Die Geschwindigkeit sei $v = 3c/5$. Ein Ereignis habe in Σ' die Koordinaten

$$x' = 10 \text{ m} \; , \qquad y' = 15 \text{ m} \; , z' = 20 \text{ m} \; , t' = 4 \cdot 10^{-8} \text{ s} \; . \tag{1}$$

Bestimmen Sie die Koordinaten des Ereignisses in Σ (10 P.).

2 Können

2.1 Harmonischer Oszillator(24 P.)

Für den eindimensionalen harmonischen Oszillator gilt:

$$\underset{\sim}{H} \quad = \quad \frac{\underset{\sim}{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \underset{\sim}{x}^2 \quad \text{mit} \quad \underset{\sim}{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{a}^\dagger) \;, \underset{\sim}{p} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \frac{(\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{a}^\dagger)}{i} \;. \tag{2}$$

Die Energieeigenzustände seien mit $|\, n\, \rangle$ bezeichnet.

a. Wie lauten die Energieeigenwerte von $\underset{\sim}{H}$ (2 P.)?

b. Was ist $\underset{\sim}{a} \,|\, n\, \rangle$ (2 P.)?

c. Was ist $\underset{\sim}{a}^\dagger \,|\, n\, \rangle$ (2 P.)?

d. Was ist $\underset{\sim}{a} \,|\, 0\, \rangle$ (2 P.)?

e. Was ist $[\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a}^\dagger]$ (2 P.)?

f. Berechnen Sie $\langle\, n\, |\, \underset{\sim}{x}\, |\, n\, \rangle$ (2 P.).

g. Berechnen Sie $\langle\, n\, |\, \underset{\sim}{p}\, |\, n\, \rangle$ (2 P.).

h. Berechnen Sie $\langle\, n\, |\, \underset{\sim}{x}^2\, |\, n\, \rangle$ (4 P.).

i. Berechnen Sie $\langle\, n\, |\, \underset{\sim}{p}^2\, |\, n\, \rangle$ (4 P.).

j. Überprüfen Sie mit Hilfe der beiden letzten Ergebnisse den Energieeigenwert von $\underset{\sim}{H}$ (2 P.).

2.2 δ-Potential (15 P.)

Extrem kurzreichweitige Kräfte werden in der Quantenmechanik oft durch ein Potential beschrieben, das die folgende Form

$$V(x) \quad = \quad \alpha\, \delta(x) \tag{3}$$

besitzt. α ist dabei eine reelle Konstante.

a. Leiten Sie die Stetigkeitsbedingung für die Wellenfunktion bei $x = 0$ her, indem Sie über ein kleines Intervall um Null integrieren und anschließend die Intervalllänge gegen Null gehen lassen (5 P.).

b. Bestimmen Sie für $\alpha > 0$ den Transmissions- und den Reflexionskoeffizienten für eine von links einlaufende ebene Welle (5 P.).

c. Bestimmen Sie alle gebundenen Zustände sowie die zugehörigen Energieeigenwerte für $\alpha < 0$ (5 P.).

3 Weiterdenken

3.1 Spinpräzession (20 P.)

Ein Spin mit Spinquantenzahl s bewege sich im homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$.

a. Geben Sie den Hamiltonoperator und seine Spektraldarstellung an (5 P.).

b. Zur Zeit $t = 0$ laute der Erwartungswert des Spinoperators

$$\langle\, \Psi(0) \,|\, \underset{\sim}{\vec{s}} \,|\, \Psi(0) \,\rangle \quad = \quad \vec{s}_0 \ . \tag{4}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert von $\underset{\sim}{\vec{s}}$ für beliebige Zeiten t (15 P.).

3.2 Ritzsches Variationsverfahren (20 P.)

Der Hamiltonoperator eines eindimensionalen anharmonischen Oszillators habe die folgende Form:

$$\underset{\sim}{H} \quad = \quad \frac{\underset{\sim}{p}^2}{2m} + \lambda\, \underset{\sim}{x}^4 \ , \qquad \lambda > 0 \ . \tag{5}$$

Bestimmen Sie approximativ die Grundzustandsenergie mit der Variationswellenfunktion

$$\phi(x) \quad = \quad c \exp\left\{-\alpha x^2\right\} \ , \qquad \alpha > 0 \ . \tag{6}$$

Normieren Sie dazu zuerst die Wellenfunktion.
Skizzieren Sie außerdem die Abhängigkeit des Energieerwartungswertes von α. Begründen Sie anhand der Skizze, dass das Extremum ein Minimum ist.

Es können 118 Punkte erreicht werden.

Noten

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow 5.0$
- $51 \leq P \leq 55 \Rightarrow 4.0$
- $56 \leq P \leq 60 \Rightarrow 3.7$
- $61 \leq P \leq 65 \Rightarrow 3.3$
- $66 \leq P \leq 70 \Rightarrow 3.0$
- $71 \leq P \leq 75 \Rightarrow 2.7$
- $76 \leq P \leq 80 \Rightarrow 2.3$
- $81 \leq P \leq 85 \Rightarrow 2.0$
- $86 \leq P \leq 90 \Rightarrow 1.7$
- $91 \leq P \leq 95 \Rightarrow 1.3$
- $96 \leq P \leq \infty \Rightarrow 1.0$

Viel Erfolg!