Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik II SS 2021	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Bitte jede Aufgabe (1.1, 2.1, 2.2, . . .) auf einem neuen Blatt. Name, Vorname und Matrikelnummer jeweils nicht vergessen.

1 Wissen

1.1 Quantenmechanik (26 P.)

a. Ein System sei im Zustand $|\,\phi\,\rangle$ präpariert. Die Observable $\underset{\sim}{A}$ soll gemessen werden. Erklären Sie die Messaxiome der Quantenmechanik sowie die Begriffe Erwartungswert und Messwert (5 P.)?

b. Wie lauten die Kommutatorrelationen und Eigenwertgleichungen für Drehimpulse? Welche Werte können die zugehörigen Quantenzahlen ganz allgemein annehmen (5 P.)?

c. Wie lautet die allgemeine Unbestimmtheitsrelation? Erläutern Sie die vorkommenden Größen (3 P.).

d. Leiten Sie kurz die Energieeigenwerte und unnormierten Eigenfunktionen des eindimensionalen unendlich hohen Kastenpotentials her. Machen Sie eine Skizze und zeichnen Sie den Grundzustand ein (5 P.).

e. Stellen Sie zeichnerisch dar, wie sich der Grundzustand ändern würde, wenn das Kastenpotential zwar hoch, aber nur endlich hoch und nicht unendlich hoch wäre. Geben Sie eine kurze Begründung an (3 P.).

f. Warum könnte man die Lösung für das hohe Kastenpotential nicht aus einer approximativen Diagonalisierung oder Störungsrechnung mittels der exakten Lösungen des unendlich hohen Kastenpotentiales gewinnen (5 P.)?

1.2 Spezielle Relativitästheorie (16 P.)

a. Wie lauten die beiden Postulate der Speziellen Relativitästheorie (4 P.)?

b. Wie lautet die Lorentz-Transformation (6 P.)?

c. Skizzieren Sie den Lichtkegel, erläutern Sie die Begriffe zeitartig, raumartig, lichtartig, zeichnen Sie diese ein und erklären Sie die Möglichkeit kausaler Zusammenhänge im raum- bzw. zeitartigen Bereich (6 P.)?

2 Können

2.1 Harmonischer Oszillator(24 P.)

Für den eindimensionalen harmonischen Oszillator gilt:

$$\underset{\sim}{H} = \frac{\underset{\sim}{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\underset{\sim}{x}^2 \quad \text{mit} \quad \underset{\sim}{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{a}^\dagger) \ , \underset{\sim}{p} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\frac{(\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{a}^\dagger)}{i} \ . \tag{1}$$

Die Energieeigenzustände seien mit $|\, n \,\rangle$ bezeichnet.

a. Wie lauten die Energieeigenwerte von $\underset{\sim}{H}$ (2 P.)?

b. Was ist $\underset{\sim}{a}\, |\, n \,\rangle$ (2 P.)?

c. Was ist $\underset{\sim}{a}^\dagger\, |\, n \,\rangle$ (2 P.)?

d. Was ist $\underset{\sim}{a}\, |\, 0 \,\rangle$ (2 P.)?

e. Was ist $[\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a}^\dagger]$ (2 P.)?

f. Berechnen Sie $\langle\, n \,|\, \underset{\sim}{x} \,|\, n \,\rangle$ (2 P.).

g. Berechnen Sie $\langle\, n \,|\, \underset{\sim}{p} \,|\, n \,\rangle$ (2 P.).

h. Berechnen Sie $\langle\, n \,|\, \underset{\sim}{x}^2 \,|\, n \,\rangle$ (4 P.).

i. Berechnen Sie $\langle\, n \,|\, \underset{\sim}{p}^2 \,|\, n \,\rangle$ (4 P.).

j. Überprüfen Sie mit Hilfe der beiden letzten Ergebnisse den Energieeigenwert von $\underset{\sim}{H}$ (2 P.).

2.2 Grundzustand im H-Atom (25 P.)

a. Überprüfen Sie, ob der folgende Ansatz Lösung der stationärer Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom ist, indem Sie den Ansatz für die Wellenfunktion in die stationäre Schrödingergleichung einsetzen:

$$\psi(\vec{x}) = \mathrm{e}^{-\kappa|\vec{x}|} \ , \qquad |\vec{x}| = r \ , \qquad \kappa > 0 \ . \tag{2}$$

Nutzen Sie Symmetrien. Wie lautet der Energieeigenwert? Wie groß ist der Bahndrehimpuls (10 P.)?

b. Bestimmen Sie die Normierungskonstante (5 P.).

c. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Elektron innerhalb eines gewissen Radiuses R anzutreffen, formelmäßig, soweit es geht (10 P.).

3 Weiterdenken

3.1 Eindimensionaler Harmonischer Oszillator (10 P.)

Für die folgende Linearkombination aus Grundzustand und erstem angeregten Zustand, $|\,\Psi(t=0)\,\rangle = 1/\sqrt{2}(\,|\,\phi_0\,\rangle + \,|\,\phi_1\,\rangle)$, berechne man formelmäßig die Zeitentwicklung des mittleren Ortes (10 P.).

3.2 Wechselwirkung zwischen drei Spins (15 P.)

Wir betrachten drei Spins mit je $s = 1$. Ihre effektive Spin-Spin-Wechselwirkung werde durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben ($J < 0$):

$$\underset{\sim}{H} \quad = \quad -\frac{2J}{\hbar^2}\left(\underset{\sim}{\vec{s}}_1 \cdot \underset{\sim}{\vec{s}}_2 + \underset{\sim}{\vec{s}}_1 \cdot \underset{\sim}{\vec{s}}_3 + \underset{\sim}{\vec{s}}_2 \cdot \underset{\sim}{\vec{s}}_3\right) \ . \tag{3}$$

a. Bestimmen Sie die Energieeigenwerte dieses Hamiltonoperators sowie deren Entartung. Begründen Sie Ihr Vorgehen (10 P.).

b. Nehmen Sie jetzt die Wechselwirkung mit einem äußeren homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ hinzu:

$$\underset{\sim}{H}_{\text{Zeeman}} \quad = \quad \frac{g\ \mu_B}{\hbar}\ \vec{B} \cdot \underset{\sim}{\vec{S}} \ . \tag{4}$$

Stellen Sie die Energieeigenwerte des Gesamthamiltonoperators als Funktion des äußeren Feldes B graphisch dar; begründen Sie kurz (5 P.).

Es können 121 Punkte erreicht werden.

Noten

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow 5.0$
- $51 \leq P \leq 55 \Rightarrow 4.0$
- $56 \leq P \leq 60 \Rightarrow 3.7$
- $61 \leq P \leq 65 \Rightarrow 3.3$
- $66 \leq P \leq 70 \Rightarrow 3.0$
- $71 \leq P \leq 75 \Rightarrow 2.7$
- $76 \leq P \leq 80 \Rightarrow 2.3$
- $81 \leq P \leq 85 \Rightarrow 2.0$
- $86 \leq P \leq 90 \Rightarrow 1.7$
- $91 \leq P \leq 95 \Rightarrow 1.3$
- $96 \leq P \leq \infty \Rightarrow 1.0$

Viel Erfolg!