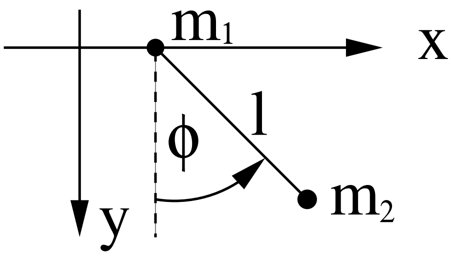
Aufgabenblatt 7

7.1 Schwingende Hantel



Eine Hantel bestehe aus den beiden Massen m_1 und m_2 im Abstand l. Die Masse m_1 der Hantel kann sich reibungsfrei entlang einer horizontalen Geraden bewegen. Auf beide Massen wirke die Schwerkraft in y-Richtung.

a. Stellen Sie zuerst die Lagrangefunktion in günstigen Koordinaten auf. Wieviele Koordinaten braucht man zur Definition der Lagrangefunktion (2 P.)?

b. Gibt es in Ihrer Formulierung der Lagrange-Funktion eine zyklische Koordinate? Wie lautet die zugehörige Erhaltungsgröße? Wenn Sie keine zyklische Koordinate finden, versuchen Sie es doch mit „günstigeren" Koordinaten (2 P.).

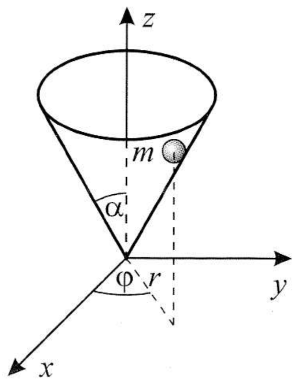
c. Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für die zyklische Koordinate auf. Diese Differentialgleichung können Sie ohne Näherung lösen. Wählen Sie als Anfangsbedingungen $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $\phi(0) = \phi_0$ und $\dot{\phi}(0) = 0$ (4 P.).

d. Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für die andere Koordinate auf. Diese ist eine gekoppelte DGL, die auch die zweite Zeitableitung der zyklischen Koordinate enthält (2 P.).

e. **Zusatzaufgabe:** Lösen Sie die zweite Euler-Lagrange-Gleichung in der Näherung kleiner Winkel, d.h. $\cos(\phi) \approx 1$ und $\sin(\phi) \approx \phi$. Führen Sie dazu bei der ersten Lösung zuerst die Näherung kleiner Winkel durch und differenzieren Sie die erste Lösung zweimal. Ersetzen Sie damit die zyklische Koordinate in der zweiten DGL. Das können Sie jetzt ohne Probleme lösen (5 Zusatzpunkte).

7.2 Teilchen in Kreiskegel

Eine Punktmasse m gleitet unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels (Schultüte).



a. Stellen Sie die Lagrangefunktion in Zylinderkoordinaten auf. Nutzen die Zwangsbedingung zur Eleminierung der z-Koordinate.

b. Leiten Sie die Bewegungsggleichungen ab.

c. Es gibt zwei Erhaltungsgrößen in diesem Problem. Welche sind das?

d. Wie lautet das Integral für $r(t)$ und wie das für $\phi(t)$ unter Verwendung der Erhaltungsgrößen? Die Integrale brauchen nicht berechnet zu werden.

e. Was denken Sie, wie die Bewegung aussieht? Beschreiben Sie die Bewegung.

Dies ist eine gute Gelegenheit, ein gutes Buch zu Rate zu ziehen.

7.3 Lenz-Vektor

Der Lenzsche Vektor kann wie folgt definiert werden

$$\vec{A} \;=\; \dot{\vec{r}} \times \vec{L} + V(r)\vec{r} \; . \tag{1}$$

a. Berechnen Sie die Zeitableitung des Lenz-Vektors. Nutzen Sie dabei die Drehimpulserhaltung und schreiben Sie $\ddot{\vec{r}}$ mit Hilfe des Potentials um.

b. Für welche Potentialformen ist der Lenz-Vektor eine Erhaltungsgröße?

c. Berechnen Sie den Betrag von $\vec{A}$.

d. Wohin zeigt der Lenz-Vektor für $V(r) \propto 1/r$? Fertigen Sie eine Skizze an.

7.4 Zusatzaufgabe: Gekoppelte harmonische Oszillatoren III

N identische harmonische Oszillatoren der Masse m seien in einer Kette mit der Kreisfrequenz ω aneinander harmonisch gekoppelt. Die Schwingungen erfolgen alle entlang einer Geraden, d.h. in einer Dimension. Um schon mit einer kleinen Zahl harmonischer Oszillatoren eine unendliche Kette simulieren zu könne, nutzt man sogenannte periodische Randbedingungen, d.h. der letzte Oszillator hängt nicht an der Wand, sondern wechselwirkt wieder mit dem ersten, der auch nicht an der Wand hängt, über eine Feder. Man kann sich das als Ring vorstellen.

a. Erstellen Sie eine Skizze des Aufbaus. Benennen Sie die Auslenkungen der Massen m aus ihren Ruhelagen mit $q_1 \ldots q_N$. Stellen Sie die gekoppelten Bewegungsgleichungen für $q_1 \ldots q_N$ auf.

b. Diese Bewegungsgleichungen kann man vektoriell schreiben. Führen Sie dazu den Vektor $\vec{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$ ein. Auf der rechten Seite taucht eine Matrix auf.

c. Dieses physikalische Problem hat eine wundervolle analytische Lösung. Dazu betrachtet man einen Operator T, der alle Oszillatoren um einen Platz verrückt, d.h. $q_1 \Rightarrow q_2$, $q_2 \Rightarrow q_3$, $\ldots$, $q_N \Rightarrow q_1$. Wie sieht der Verschiebeoperator T als Matrix aus?

d. Für den Verschiebeoperator gilt $T^N = 1$. Daraus ergibt sich, dass seine Eigenwerte die komplexen Zahlen

$$z_k = \exp\left\{-i\frac{2\pi k}{N}\right\}, \qquad k = 0, \ldots, N-1 \tag{2}$$

sind. k ist hier ein Index, nicht die Federkonstante. Die Vektoren

$$\vec{Q}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\nu=0}^{N-1} \left(e^{i\frac{2\pi k}{N}}\, T\right)^{\nu} \vec{q} \tag{3}$$

sind nicht nur Eigenvektoren von T, sondern lösen auch die Differentialgleichung! Zeigen Sie dies für $N = 2$ und $N = 3$ und bestimmen Sie die Eigenwerte $\omega(k)$. Wenn Sie es allgemein zeigen können, gibt es von mir eine Tüte Gummibärchen!

Diese Aufgabe wird am Montag gründlich vorbereitet, d.h. nahezu durchgerechnet.

7.5 Selbststudium: d'Alembertsches Prinzip

Erarbeiten Sie sich im Selbststudium das d'Alembertsche Prinzip, das auch Prinzip der virtuellen Verrückungen genannt wird. Sie finden dies in praktisch jedem Mechanikbuch, z.B. im 2. Band des Grundkurses Theoretische Physik von Nolting. Schauen Sie sich in dem Buch ruhig etwas um. Sie finden hier praktisch alles, was wir gemacht haben und so manche Übungsaufgabe.
Diese Aufgabe wird nicht verglichen und braucht auch nicht angekreuzt zu werden.