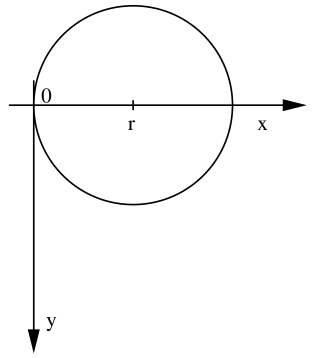
Universität Bielefeld	Theoretische Physik I	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	WS 2021/2022	jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 6

6.1 Ringbahn



Eine Perle der Masse m bewege sich reibungsfrei unter dem Einfluß der Schwerkraft – $\vec{g} = g\vec{e}_y$ – auf einer ringförmigen Bahn.

a. Stellen Sie die Lagrangefunktion auf. Verwenden Sie dazu eine geeignete verallgemeinerte Koordinate (2 P).

b. Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung auf und leiten Sie die Bewegungsgleichung für die verallgemeinerte Koordinate her (2 P).

c. Die Perle ruhe zur Zeit $t = 0$ im Koordinatenursprung. In welcher Zeit durchläuft sie den unteren Halbkreis, wenn dieser den Radius $r = 1$ m hat? Beschreiben Sie, wie sie diese Zeit ermittelt haben (3 P.).

d. Beschreiben Sie, was passiert, wenn man den Startpunkt in die Nähe des Potentialminimums legt. Stellen Sie die Schwingungsdauer (Periodendauer) als Funktion der Auslenkung aus dem Potentialminimum graphisch dar und vergleichen Sie in der Graphik mit der entsprechenden Schwingungsdauer eines harmonischen Oszillators (3 P.).

6.2 Lagrangefunktion und Euler-Lagrange-Gleichung

a. Geben Sie die Lagrangefunktion eines isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillators und die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen in kartesischen Koordinaten an.

b. Geben Sie die Lagrangefunktion eines isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillators und die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen in Kugelkoordinaten an.

c. Geben Sie die Lagrangefunktion und die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen für die Bewegung einer Masse im homogenen Schwerefeld an der Erdoberfläche an.

6.3 Gekoppelte harmonische Oszillatoren II

N identische harmonische Oszillatoren der Masse m seien in einer Kette mit der Federkonstanten k aneinander harmonisch gekoppelt. Die erste und die letzte Masse sind mit den gleichen Federn mit statischen Wänden verbunden. Die Schwingungen erfolgen alle entlang einer Geraden, d.h. in einer Dimension.

a. Erstellen Sie eine Skizze des Aufbaus. Benennen Sie die Auslenkungen der Massen m aus ihren Ruhelagen mit $q_1 \dots q_N$. Stellen Sie die gekoppelten Bewegungsgleichungen für $q_1 \dots q_N$ auf.

b. Diese Bewegungsgleichungen kann man vektoriell schreiben. Führen Sie dazu den Vektor $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ ein. Auf der rechten Seite taucht dann eine Matrix auf.

c. Wie kann man jetzt auf die Lösung kommen? Gehen Sie mit einem Exponentialansatz der Form $\vec{q} = \vec{Q} \exp\{i\Omega t\}$ in die DGL. Was für eine Gleichung erhalten Sie? Denken Sie an Lineare Algebra.

d. Bestimmen Sie für $N = 2$ und $N = 3$ die Eigenfrequenzen und skizzieren Sie die Normalmoden. Die Lösung für $N = 2$ können Sie mit einem früheren Zettel vergleichen.

e. Wie lautet die Matrix aus b für beliebige N?