Universität Bielefeld	Theoretische Physik II	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	SS 2020	jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt Z1: Vergleich am 26.05.2020

42.1 Kastenpotential komplett

In der Vorlesung hatten wir das unendlich hohe Kastenpotential zur Einführung recht kurz behandelt. Diese Übung soll der Wiederholung und Vertiefung dienen.

a. Leiten Sie die Energieeigenwerte und -eigenfunktionen des unendlich hohen Kastenpotentials her. Stellen Sie zuerst den Hamiltonoperator auf und definieren Sie Bereiche und Randbedingungen.

b. Beschreiben Sie formelmäßig die Zeitentwicklung eines beliebigen Zustandes $|\,\Psi(t)\,\rangle$. Wiederholen Sie an dieser Stelle die zeitabhängige Schrödingergleichung sowie die Spektraldarstellung des Zeitentwicklungsoperators. Wie lautet die allgemeine zeitabhängige Lösung $|\,\Psi(t)\,\rangle$, wenn sich das System zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|\,\Psi(0)\,\rangle$ befunden hat?

c. Nehmen Sie an, dass das System zur Zeit $t = 0$ durch den Zustand

$$\langle\, x \,|\, \Psi(0)\,\rangle \quad = \quad \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}\,L} \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) & \text{für } 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{L}{2} \le x \le L\ . \end{cases} \tag{1}$$

beschrieben wird. Bestimmen Sie die ersten 20 Komponenten von $|\,\Psi(0)\,\rangle$ bezüglich der Basis $\{\,|\,\phi_n\,\rangle\}$ numerisch mit Mathematica oder einem anderen Programm und stellen Sie die Zeitentwicklung des Realteils, des Imaginärteils und des Betrags graphisch dar. Falls Sie das mit dem Programmieren nicht schaffen – Wirklich nicht? – schreiben Sie wenigstens alles so hin, dass man es nur noch programmieren müsste.

d. In der statistischen Thermodynamik (Theoretische Physik III) werden Sie lernen, wie man thermodynamische Größen aus mikroskopischen Modellen ableitet. Die zentrale Größe ist die Zustandssumme

$$Z(\beta) \quad = \quad \mathrm{Sp}\left\{ e^{-\beta \underset{\sim}{H}} \right\}\ . \tag{2}$$

Dabei ist $\beta = 1/(k_B T)$, k_B die Boltzmann-Konstante und T die absolute Temperatur. Wie lautet $Z(T)$ für das unendlich hohe Kastenpotential? Die resultierende Reihe hat einen Namen, es ist die dritte elliptische ϑ-Funktion. Finden Sie ein Buch, in dem diese Funktion steht. Welches ist es?

Die innere Energie $U(T)$ ergibt sich dann zu

$$U(T) \quad = \quad -\frac{\partial}{\partial\,\beta} \ln\left(Z(\beta)\right)\ . \tag{3}$$

Schauen Sie doch mal, ob Sie das, z.B. mit Mathematica, hinbekommen und die innere Energie als Funktion der Temperatur graphisch darstellen können. Fassen Sie dazu Konstanten zusammen (niemals mit $\hbar$ rechnen, ist zu klein).