

Aufgabenblatt 12: Abgabe 29.06.2020

12.1 Wechselwirkung zwischen drei Spins

Wir betrachten drei Spins mit je $s = 1$. Ihre effektive Spin-Spin-Wechselwirkung werde durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben:

$$\tilde{H} = -\frac{2J}{\hbar^2} \left(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 \right). \quad (1)$$

- Bestimmen Sie die Energieeigenwerte dieses Hamiltonoperators sowie deren Entartung. Hinweis: Sie können den Hamiltonoperator durch quadratische Ergänzung nutzbringend umformen. Zur Berechnung der Entartung ist eine Betrachtung der Kopplungsmöglichkeiten hilfreich.
- Nehmen Sie jetzt die Wechselwirkung mit einem äußeren homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ hinzu:

$$\tilde{H}_{\text{Zeeman}} = \frac{g \mu_B}{\hbar} \vec{B} \cdot \vec{S}. \quad (2)$$

Hierbei ist \vec{S} der Gesamtspin. Stellen Sie die Energieeigenwerte des Gesamthamiltonoperators als Funktion des äußeren Feldes B graphisch dar.

c. Zusatzaufgabe: 5 Extrapunkte

Der Spin ist der Generator der Drehungen. Was ist

$$\exp\left\{-i\frac{\alpha s_z}{\hbar}\right\} \vec{s} \exp\left\{i\frac{\alpha s_z}{\hbar}\right\} \quad (3)$$

für einen einzelnen Spin? Sie können das Ergebnis herleiten, indem Sie das Hadamard-Lemma (bzw. die Liesche Entwicklungsformel) nutzen

$$\exp\{\underline{A}\} \underline{B} \exp\{-\underline{A}\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} [\underline{A}, \underline{B}]_m. \quad (4)$$

Dabei ist

$$[\underline{A}, \underline{B}]_m = [\underline{A}, [\underline{A}, \underline{B}]_{m-1}] \quad (5)$$

und

$$[\underline{A}, \underline{B}]_0 = \underline{B}. \quad (6)$$

Ordnen Sie die Reihe geschickt um und fassen Sie diese wieder zusammen (zumal Sie ja wissen, was rauskommen muss).

d. Zusatzaufgabe: 5 Extrapunkte

Weshalb dreht jetzt der Gesamtspinoperator alle Spins gleichzeitig?