Aufgabenblatt 11: Abgabe 22.06.2020

11.1 Grundzustand im H-Atom

- a. Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom, indem Sie den folgenden Ansatz für die Wellenfunktion einsetzen:

$$\psi(\vec{x}) = e^{-\kappa|\vec{x}|}, \quad |\vec{x}| = r, \quad \kappa > 0. \quad (1)$$

Nutzen Sie Symmetrien.

- b. Bestimmen Sie die Normierungskonstante.
- c. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Elektron innerhalb des Bohrschen Radius a anzutreffen. Berechnen Sie ebenfalls die Wahrscheinlichkeiten für $2a$ und $3a$.
- d. Berechnen Sie den Erwartungswert des Radius $\langle \tilde{r} \rangle$ sowie den Erwartungswert $\langle \tilde{r}^2 \rangle$.
- e. Vergleichen Sie die Größenordnungen von $\sqrt{\langle \tilde{r}^2 \rangle - \langle \tilde{r} \rangle^2}$ und $\langle \tilde{r} \rangle$.

11.2 Wasserstoff-Problem II

- a. Zeigen Sie, dass der Bohr-Radius den wahrscheinlichsten Wert des Elektron-Proton-Abstandes darstellt, d.h. Maximum der Funktion $r^2 R_{10}^2(r)$ ist. Warum betrachtet man eigentlich diese Funktion und nicht $R_{10}^2(r)$?
- b. Bestimmen Sie den minimalen (klassischen Wert) des effektiven Potentials

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \quad (2)$$

für $l = 1, 2, 3, \dots$ und vergleichen Sie diesen mit den Energieeigenwerten des Wasserstoffatoms. Was lernen wir daraus?

11.3 Zusatzaufgabe: Legendre-Polynome

Bei der Herleitung der Kugelflächenfunktion hatten wir die Lösungen der Legendre-Differentialgleichung sowie der verallgemeinerten Legendre-Differentialgleichung nur angegeben.

Erarbeiten Sie sich diese DGLm sowie Ihre Lösungen mit Hilfe des Buches Nolting 5/2, S. 26-29 oder des Buches von Pucker und Lang.