

Aufgabenblatt 10: Abgabe 15.06.2020

10.1 Bahndrehimpuls

Der Bahndrehimpuls ist wie folgt definiert:

$$\vec{\tilde{L}} = \vec{\tilde{x}} \times \vec{\tilde{p}} \quad (1)$$

- Zeigen Sie, dass $\vec{\tilde{L}}$ hermitesch ist.
- Leiten Sie den Kommutator $[\tilde{L}_x, \tilde{L}_y]$ her.
- Leiten Sie den Kommutator $[\vec{\tilde{L}}^2, \tilde{L}_z]$ her.
- Leiten Sie den Kommutator $[\tilde{x}^2, \tilde{L}_z]$ her.
- Leiten Sie den Kommutator $[\tilde{p}^2, \tilde{L}_z]$ her.
- Leiten Sie den Kommutator $[\tilde{L}^+, \tilde{L}^-]$ her.

10.2 Der starre Rotator

Eine starre Hantel rotiere im Raum um den Koordinatenursprung, d.h. ihre Freiheitsgrade sind ϑ und ϕ . Diese Bewegung werde durch den Hamiltonoperator

$$\tilde{H} = \frac{1}{2J} \vec{\tilde{L}}^2 \quad (2)$$

beschrieben. Dabei ist J das Trägheitsmoment.

- Berechnen Sie die Eigenwerte, Eigenfunktionen und eventuellen Entartungsgrade.
- Der Rotator befinde sich im Zustand $\psi(\vartheta, \phi) = c\{\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta) \cos(2\phi)\}$. Normieren Sie diese Funktion und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten bei einer Messung von $\vec{\tilde{L}}^2$ die Werte $6\hbar^2$, $2\hbar^2$ oder 0 zu erhalten.
Tipp: Drücken Sie die Winkelfunktionen durch Kugelflächenfunktionen aus.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei Messung von $\vec{\tilde{L}}^2$ und \tilde{L}_z das Wertepaar $(6\hbar^2, -2\hbar)$ zu erhalten.

10.3 Kugelflächenfunktionen

Stellen Sie die Kugelflächenfunktionen für $l = 0, 1, 2, 3$ mit Hilfe von Mathematica graphisch dar. Schauen Sie dazu in der Hilfe von `SphericalPlot3D` nach.

10.4 Korrespondenzprinzip: Produkte von Operatoren

Für Produkte von klassischen Observablen ist es nicht naheliegend oder gar eindeutig, wie der entsprechende quantenmechanische Operator aussieht, wenn die beiden Operatoren nicht kommutieren. Als Beispiel betrachten wir den Operator

$$\tilde{A} = (1 - \alpha)\tilde{x}\tilde{p} + \alpha\tilde{p}\tilde{x} . \quad (3)$$

- Für welche α ist der Operator hermitesch?
- Berechnen Sie den Erwartungswert des Operators $\tilde{x}\tilde{p}$ für ein Gaußsches Wellenpaket als ein Beispiel für einen nicht reellen Erwartungswert.
- Warum tritt das angesprochene Problem beim Operator des Bahndrehimpulses

$$\vec{\tilde{L}} = \vec{\tilde{x}} \times \vec{\tilde{p}} \quad (4)$$

nicht auf?