Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik II SS 2020	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 8: Abgabe 02.06.2020

8.1 Gaußsches Wellenpaket

Gaußsche Wellenpakete spielen für das Verständnis der Quantenmechanik eine wichtige Rolle. Sie werden außerdem in der Quantenoptik sowie in Näherungsverfahren verwendet.
Die Wellenfunktion des Gaußschen Wellenpakets in einer Raumdimension lautet

$$\langle\, x \,|\, \phi \,\rangle \quad = \quad c \exp\left\{ -\frac{(x-x_0)^2}{2a} + i\frac{x p_0}{\hbar} \right\} \; . \tag{1}$$

a, x_0 und p_0 sind dabei reell.

a. Bestimmen Sie die Normierungskonstante c.

b. Berechnen Sie die Erwartungswerte des Ortsoperators und des Impulsoperators, d.h. den mittleren Ort und den mittleren Impuls.

c. Wie lautet die Impulsdarstellung des Gaußschen Wellenpakets?

d. Überprüfen Sie die Heisenbergsche Unschärferelation.

e. Lösen Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung für die freie Bewegung ($\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{T}$) und geben Sie die Wellenfunktion für spätere Zeiten an.

f. Was erhalten Sie für $\langle\, \phi(t) \,|\, \underset{\sim}{x} \,|\, \phi(t) \,\rangle$?

8.2 Funktionen auf $[a, b]$ mit Randbedingung

Man betrachte die stetigen komplexwertigen Funktionen f auf dem Intervall $[0, L]$, die an den Endpunkten verschwinden, d.h. $f(0) = f(L) = 0$. Diese Funktionen sind m.E. automatisch auch quadratintegrabel, also Element von $L^2([0, L], \mathbb{C}, f(0) = f(L) = 0)$.
Auf dem Intervall sei ebenfalls ein Funktionensystem gegeben:

$$\langle\, x \,|\, u_n \,\rangle \quad = \quad u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[\frac{n\pi}{L} x\right] \quad , \qquad n = 1, 2, \ldots \; . \tag{2}$$

a. Skizzieren Sie die ersten drei Funktionen u_1, u_2, u_3.

b. Überprüfen Sie, ob die Funktionen $|\, u_n \,\rangle$ ein Orthonormalsystem bilden.

c. Es liegt nahe, zu vermuten, daß die Funktionen $|\, u_n \,\rangle$ eine Basis im Vektorraum $L^2([0, L], \mathbb{C}, f(0) = f(L) = 0)$ bilden. Wie könnte man das beweisen?

8.3 Ehrenfesttheorem

Für die Zeitableitung des Erwartungswertes eines Operators $\underset{\sim}{B}$ ergibt sich nach Vorlesung

$$\frac{d}{dt}\,\langle\,\Psi(t)\,|\,\underset{\sim}{B}\,|\,\Psi(t)\,\rangle \;=\; \frac{1}{i\hbar}\,\langle\,\Psi(t)\,|\,\left[\,\underset{\sim}{B}\,,\,\underset{\sim}{H}\,\right]\,|\,\Psi(t)\,\rangle + \langle\,\Psi(t)\,|\,\frac{\partial}{\partial\, t}\,\underset{\sim}{B}\,|\,\Psi(t)\,\rangle\;. \tag{3}$$

a. Berechnen Sie für den Hamiltonoperator

$$\underset{\sim}{H} \;=\; \frac{\underset{\sim}{p}^2}{2m} + V(\underset{\sim}{x}) \tag{4}$$

die Zeitableitungen von $\langle\,\Psi(t)\,|\,\underset{\sim}{x}\,|\,\Psi(t)\,\rangle$ und $\langle\,\Psi(t)\,|\,\underset{\sim}{p}\,|\,\Psi(t)\,\rangle$. Nutzen Sie die Kommutatorrelation $[\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{p}] = i\hbar$ sowie die Ortsdarstellung des Impulses.

Vereinfachen Sie die rechten Seiten möglichst weit und interpretieren Sie diese im Lichte der klassischen Mechanik.

b. Schauen Sie in der Literatur nach, was man unter *Ehrenfesttheorem* versteht. Es ist gut möglich, dass das nicht ganz gleichlautend ist.

c. Wie drückt Ehrenfest sich selbst in seinem Artikel *Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik*, Zeitschrift für Physik **45** (1927) 455-457, aus? Sie können den Artikel im Original auf der Seite von Springer herunterladen: `http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF01329203`