Universität Bielefeld	Theoretische Physik II	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	SS 2020	jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 5: Abgabe 11.5.2020

5.1 Hermitesche Operatoren

a. Geben Sie die Definition für einen hermiteschen Operator an und benennen Sie die auftretenden Größen.

b. Beweisen Sie, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell sind. Betrachten Sie dazu die Differenz aus

$$\langle\, a_m \mid \underset{\sim}{A} \mid a_n \,\rangle = a_n \langle\, a_m \mid a_n \,\rangle \tag{1}$$

und

$$\langle\, a_m \mid \underset{\sim}{A}^\dagger \mid a_n \,\rangle = a_m^* \langle\, a_m \mid a_n \,\rangle \ . \tag{2}$$

Die Vektoren $\mid a_n \,\rangle$ seien die Eigenzustände von $\underset{\sim}{A}$.

c. Beweisen Sie, dass die Eigenvektoren eines hermiteschen Operators, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, orthogonal sind. Dazu können Sie die schon berechnete Differenz benutzen.

d. Geben Sie einen physikalischen Grund an, warum es konsistent ist, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell sind.

5.2 Stern-Gerlach-Versuch mit polarisiertem Licht

Wiederholen Sie für sich die aus der Vorlesung bekannte Analogie zwischen den Stern-Gerlach-Experimenten mit Magnetfeldern in z- und x-Richtung sowie Polarisatoren in x- bzw. y-Richtung sowie in die um 45° geneigten Richtungen x' und y'.
Zirkular polarisiertes Licht kann nun als Analogon für den dritten möglichen Stern-Gerlach-Versuch, in y-Richtung, dienen. Man unterscheidet dabei die beiden Polarisationen im Uhrzeigersinn (rechts-zirkular) und entgegen dem Uhrzeigersinn (links-zirkular).

a. Geben Sie die Formel für die elektrische Feldstärke von zirkular polarisiertem Licht an, welches in z-Richtung fortschreitet. Stellen Sie das Ergebnis mittels Phasenverschiebung dar und geben Sie ebenfalls an, wie die komplexe Schreibweise lautet. Erklären Sie die Formeln kurz.

b. Welches Ergebnis erhält man, wenn das Licht in einem horizontalen Polarisator polarisiert wird (x-Richtung) und anschließend einen Filter für links-zirkular polarisiertes Licht durchläuft? Welches Ergebnis würde man bei einem Filter für rechts-zirkular polarisiertes Licht erhalten? Begründen Sie.

c. Stellen Sie sich jetzt vor, das Licht durchläuft zuerst einen horizontalen Polarisator (x-Richtung), sodann einen Polarisator für rechts-zirkular polarisiertes Licht und wird dann zum einen mit einem vertikalen Filter (y-Richtung) zum anderen mit einem horizontalen Filter (x-Richtung) analysiert. Erklären Sie die Ergebnisse.

5.3 Spin $s = 1$

Leiten Sie für einen Spin $s = 1$ die Darstellungen der drei Spinkomponenten $\underset{\sim}{s}_x, \underset{\sim}{s}_y, \underset{\sim}{s}_z$ in der Eigenbasis von $\underset{\sim}{s}_z$ her. Verwenden Sie dabei

a. die Eigenwertgleichungen für den Spin,

b. den Zusammenhang zwischen $\underset{\sim}{s}_x, \underset{\sim}{s}_y$ und $\underset{\sim}{s}^+, \underset{\sim}{s}^-$,

c. sowie

$$\underset{\sim}{s}^{\pm} \,|\, s\ m \,\rangle \quad = \quad \hbar \sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1)} \,|\, s\ m \pm 1 \,\rangle \ . \tag{3}$$

5.4 Zusatzaufgabe: Eigenwerte und Eigenvektoren

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix} \ . \tag{4}$$

Diese Matrix kann numerisch diagonalisiert werden. Allerdings kann man an der Struktur der Matrix erkennen, dass sich die Diagonalisierung vereinfachen läßt. Können Sie sich vorstellen wie? Begründen Sie Ihre Idee.