

Aufgabenblatt 4: Abgabe bis 4. 5. 2020

4.1 Eigenwerte und Eigenvektoren von Spinoperatoren

Der Operator \tilde{s}_z hat für ein Teilchen mit Spin $s = 1/2$ die Eigenzustände $\{|s_z +\rangle, |s_z -\rangle\}$. Die Basiszustände bilden eine Orthonormalbasis und seien stets in dieser Reihenfolge durchnummeriert. Alle Ergebnisse dieser Aufgabe können Sie anhand Ihrer Mitschrift überprüfen.

- a. Der Operator \tilde{s}_x hat bezüglich dieser Basis die Darstellung

$$\tilde{s}_x \equiv \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Schreiben Sie \tilde{s}_x als Operator unter Zuhilfenahme des äußeren Produkts auf.

- b. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix (1). Stellen Sie die Eigenvektoren als Linearkombination der Eigenvektoren zu \tilde{s}_z dar.
- c. Stellen Sie die Eigenvektoren von \tilde{s}_z als Linearkombination der Eigenvektoren von \tilde{s}_x (1) dar.
- d. Die Vertauschungsrelationen für Spins lautet

$$[\tilde{s}_x, \tilde{s}_y] = i\hbar \tilde{s}_z. \quad (2)$$

In diesem Ausdruck können die Indizes zyklisch vertauscht werden, d.h. $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$. Da Sie die Darstellungen von \tilde{s}_z und \tilde{s}_x kennen, können Sie jetzt in einer Basis Ihrer Wahl (ich empfehle die Eigenbasis zu \tilde{s}_z) die Darstellung von \tilde{s}_y berechnen. Schreiben Sie \tilde{s}_y als Operator unter Zuhilfenahme des äußeren Produkts der Eigenvektoren zu \tilde{s}_z auf.

4.2 Erwartungswerte und Messwahrscheinlichkeiten für Spinkomponenten

Durch eine spezielle Stern-Gerlach-Apparatur sei das System im Zustand

$$|\alpha\rangle = 0.6 |s_z +\rangle + 0.8 |s_z -\rangle \quad (3)$$

präpariert.

- a. Wie lautet der Erwartungswert des Operators \tilde{s}_z bezüglich $|\alpha\rangle$? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten bei einer Messung von \tilde{s}_z die Komponenten „spin up“ und „spin down“ auf?
- b. Wie lautet der Erwartungswert des Operators \tilde{s}_y bezüglich $|\alpha\rangle$? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten bei einer Messung von \tilde{s}_y die Komponenten „spin up“ und „spin down“ auf?
- c. Konstruieren Sie eine Stern-Gerlach-Apparatur, mit der der Zustand $|\alpha\rangle$ präpariert werden kann. Begründen Sie.

4.3 Verkanteter Stern-Gerlach-Versuch

Ein etwas schusseliger Experimentator (Männer! Musste wahrscheinlich schnell gehen wegen der Champions-League!) orientiert seinen Stern-Gerlach-Versuch statt in z -Richtung entlang $\theta = 30, \phi = 30$, wobei θ und ϕ die üblichen Kugelkoordinaten sind, d.h. θ misst die Auslenkung von der positiven z -Achse und ϕ den Drehwinkel in der $x-y$ -Ebene entgegen dem Uhrzeigersinn. Der Eingangsstrahl sei im Zustand $|s_z + \rangle$ präpariert.

Welche Eigenwerte misst der Experimentator und mit welchen Wahrscheinlichkeiten? Und wie ging das Endspiel Bayern gegen Dortmund 2013 aus?

4.4 Unbestimmtheitsrelation

Das Spinsystem ($s = 1/2$) sei im Zustand $|\phi\rangle = |s_z + \rangle$.

- a. Berechnen Sie

$$\langle (\Delta_{\tilde{s}_x})^2 \rangle = \langle \tilde{s}_x^2 \rangle - \langle \tilde{s}_x \rangle^2 . \quad (4)$$

- b. Überprüfen Sie, ob die Unbestimmtheitsrelation für zwei Observable \tilde{A} und \tilde{B} erfüllt ist, wenn $\tilde{A} = \tilde{s}_x$ und $\tilde{B} = \tilde{s}_y$ sowie $|\phi\rangle = |s_z + \rangle$.
- c. Führen Sie die gleiche Überprüfung für $\tilde{A} = \tilde{s}_x$ und $\tilde{B} = \tilde{s}_y$ sowie $|\phi\rangle = |s_x + \rangle$ durch.