Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik II SS 2020	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 3: Abgabe bis 27. 4. 2020

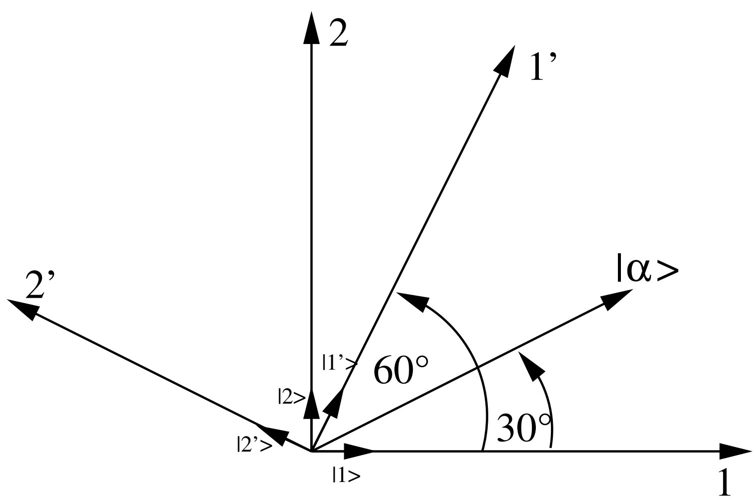
3.1 Darstellung und Koordinatenwechsel

Ein Vektor $|\,\alpha\,\rangle$ liege in einer Ebene. Bezüglich des Koordinatensystems gegeben durch die Orthonormalbasis $\{\,|\,1\,\rangle,\ |\,2\,\rangle\}$ liege er im ersten Quadranten mit einem Winkel von 30^o zur 1-Achse. Der Vektor $|\,\alpha\,\rangle$ habe die Länge 5.

a. Geben Sie die Darstellung des Vektors $|\,\alpha\,\rangle$ bezüglich des Koordinatensystems (ONB) $\{\,|\,1\,\rangle,\ |\,2\,\rangle\}$ an.

b. Ein zweites Koordinatensystem (ONB) $\{\,|\,1'\,\rangle,\ |\,2'\,\rangle\}$ ergebe sich aus dem ersten durch Drehung um 60^o entgegen dem Uhrzeiger. Welche Darstellung hat der Vektor $|\,\alpha\,\rangle$ bezüglich des neuen Koordinatensystems?

c. Versuchen Sie, eine allgemeine Umrechnungsvorschrift von der Darstellung im Koordinatensystem $\{\,|\,1\,\rangle,\ |\,2\,\rangle\}$ in die des Koordinatensystems $\{\,|\,1'\,\rangle,\ |\,2'\,\rangle\}$ anzugeben. Welche Kenntnis benötigt man für eine solche allgemeine Vorschrift?



3.2 Darstellung einer Abbildung

Ein dreidimensionales Koordinatensystem sei durch eine Orthonormalbasis $\{\,|\,\phi_1\,\rangle,\ |\,\phi_2\,\rangle,\ |\,\phi_3\,\rangle\}$ gegeben. Die Abbildung $\underset{\sim}{A}$ drehe jeden Vektor um die 3-Achse um den Winkel 45^o entgegen dem Uhrzeiger, d.h. Vektoren des ersten Quadranten in der 1-2-Ebene wandern in Richtung des zweiten Quadranten. Gleichzeitig strecke die Abbildung die Vektoren entlang der 3-Richtung um den Faktor 5.

a. Wie lautet die Darstellung der Abbildung bezüglich der Basis $\{\,|\,\phi_1\,\rangle,\ |\,\phi_2\,\rangle,\ |\,\phi_3\,\rangle\}$?

b. Welcher Vektor ergibt sich, wenn ich die Abbildung auf den Vektor $|\,\phi\,\rangle = 1\,|\,\phi_1\,\rangle + 2\,|\,\phi_2\,\rangle + 3\,|\,\phi_3\,\rangle$ anwende?

3.3 Projektionen

Wir betrachten eine Projektion in einem dreidimensionalen Vektorraum, der durch die orthonormalen Basisvektoren $\{\,|\,1\,\rangle,\ |\,2\,\rangle,\ |\,3\,\rangle\}$ aufgespannt wird. Wiederholen Sie zur Vorbereitung die Definition für einen Projektionsoperator.

a. Überprüfen Sie, ob die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

ein Projektor ist. Welche Eigenschaft der Projektoren haben Sie ausgenutzt?

b. Beschreiben Sie verbal und mathematisch, worauf der Projektor projiziert.

c. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A. Erklären Sie, warum gerade die von Ihnen gefundenen (recht speziellen) Eigenwerte auftreten.