Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik II SS 2020	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Bitte jede Aufgabe (1.1, 2.1, 2.2, ...) auf einem neuen Blatt. Name, Vorname und Matrikelnummer jeweils nicht vergessen.

1 Wissen

1.1 Quantenmechanik (26 P.)

a. Wie lauten die stationäre und die zeitabhängige Schrödingergleichung? Wie viele Lösungen hat die stationäre Schrödingergleichung (3 P.)?

b. Ein System sei im Zustand $\mid \phi \rangle$ präpariert. Die Observable $\underset{\sim}{A}$ soll gemessen werden. Erklären Sie kurz die Messaxiome der Quantenmechanik sowie die Begriffe Erwartungswert und Messwert (5 P.)?

c. Wie lauten die Kommutatorrelationen und Eigenwertgleichungen für Drehimpulse? Welche Werte können die zugehörigen Quantenzahlen annehmen (5 P.)?

d. Wie lautet die allgemeine Unbestimmtheitsrelation? Erläutern Sie die vorkommenden Größen (3 P.).

e. Wie lauten der Hamiltonoperator und die Energieeigenwerte des Wasserstoffproblems? Geben Sie die Entartung der Energieniveaus an, wenn man den Spin (und die anderen relativistischen und quantenfeldtheoretischen Korrekturen) nicht berücksichtigt (5 P.)?

f. Erläutern Sie die Idee des Ritzschen Variationsverfahrens. Welche wichtige Eigenschaft hat die Lösung (5 P.)?

2 Können

2.1 Harmonischer Oszillator(20 P.)

Für den eindimensionalen harmonischen Oszillator gilt:

$$\underset{\sim}{H} \quad = \quad \frac{\underset{\sim}{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\underset{\sim}{x}^2 \quad \text{mit} \quad \underset{\sim}{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{a}^\dagger)\ , \underset{\sim}{p} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\frac{(\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{a}^\dagger)}{i}\ . \tag{1}$$

Das sollten Sie auch auswendig können.
Die Energieeigenzustände seien mit $|\, n\, \rangle$ bezeichnet.

a. Wie lauten die Energieeigenwerte von $\underset{\sim}{H}$ (2 P.)?

b. Was ist $\underset{\sim}{a}\, |\, n\, \rangle$ (2 P.)?

c. Was ist $\underset{\sim}{a}^\dagger\, |\, n\, \rangle$ (2 P.)?

d. Was ist $\underset{\sim}{a}\, |\, 0\, \rangle$ (2 P.)?

e. Was ist $[\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a}^\dagger]$ (2 P.)?

f. Berechnen Sie $\langle\, n\, |\, \underset{\sim}{x}\, |\, n\, \rangle$ (2 P.).

g. Berechnen Sie $\langle\, n\, |\, \underset{\sim}{p}\, |\, n\, \rangle$ (2 P.).

h. Berechnen Sie $\langle\, n\, |\, \underset{\sim}{x}^2\, |\, n\, \rangle$ (2 P.).

i. Berechnen Sie $\langle\, n\, |\, \underset{\sim}{p}^2\, |\, n\, \rangle$ (2 P.).

j. Überprüfen Sie mit Hilfe der beiden letzten Ergebnisse den Energieeigenwert von $\underset{\sim}{H}$ (2 P.).

2.2 Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren (15 P.)

Aus dem System von Potenzfunktionen $|\, f_n\, \rangle$ mit $\{f_n(x) = \langle\, x\, |\, f_n\, \rangle = x^n | n = 0, 1, 2, \dots\}$ lässt sich in $C^0([a, b], \mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle\, f\, |\, g\, \rangle \quad = \quad \int_a^b \mathrm{d}x\ f^*(x)\, g(x) \tag{2}$$

nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren ein Orthogonalsystem von Polynomen bilden. Für den hier betrachteten Fall seien $a = -1$ und $b = 1$.
Bestimmen Sie die ersten vier orthogonalen Polynome $|\, g_n\, \rangle, n = 0, 1, 2, 3$ sowie ihre Ortsdarstellung.

2.3 Projektionen (20 P.)

Wir betrachten eine Projektion in einem dreidimensionalen Vektorraum, der durch die orthonormalen Basisvektoren $\{ |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle \}$ aufgespannt wird.

a. Überprüfen Sie, ob die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

ein Projektor ist. Welche Eigenschaft der Projektoren haben Sie ausgenutzt (5 P.)?

b. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A. Erklären Sie, warum gerade die von Ihnen gefundenen (recht speziellen) Eigenwerte auftreten (10).

c. Wie lautet die Spektraldarstellung von A (3 P.)?

d. Beschreiben Sie verbal und mathematisch, worauf der Projektor projiziert (2 P.).

3 Weiterdenken

3.1 Eindimensionaler Harmonischer Oszillator (10 P.)

a. Für die folgende Linearkombination aus Grundzustand und erstem angeregten Zustand, $|\Psi(t=0)\rangle = 1/\sqrt{2}(|\phi_0\rangle + |\phi_1\rangle)$, berechne man formelmäßig die Zeitentwicklung des mittleren Ortes sowie des mittleren Impulses (10 P.).

3.2 Ritzsches Variationsverfahren (20 P.)

Der Hamiltonoperator eines eindimensionalen anharmonischen Oszillators habe die folgende Form:

$$\underset{\sim}{H} = \frac{\underset{\sim}{p}^2}{2m} + \lambda \, \underset{\sim}{x}^4 \; . \tag{4}$$

Bestimmen Sie approximativ die Grundzustandsenergie mit der Variationswellenfunktion

$$\phi(x) = c \exp\left\{-\alpha x^2\right\} \; . \tag{5}$$

Normieren Sie dazu zuerst die Wellenfunktion.

Es können 111 Punkte erreicht werden.

Noten

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow 5.0$
- $51 \leq P \leq 55 \Rightarrow 4.0$
- $56 \leq P \leq 60 \Rightarrow 3.7$
- $61 \leq P \leq 65 \Rightarrow 3.3$
- $66 \leq P \leq 70 \Rightarrow 3.0$
- $71 \leq P \leq 75 \Rightarrow 2.7$
- $76 \leq P \leq 80 \Rightarrow 2.3$
- $81 \leq P \leq 85 \Rightarrow 2.0$
- $86 \leq P \leq 90 \Rightarrow 1.7$
- $91 \leq P \leq 95 \Rightarrow 1.3$
- $96 \leq P \leq \infty \Rightarrow 1.0$

Viel Erfolg!