Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik II SS 2020	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Bitte jede Aufgabe (1.1, 2.1, 2.2, . . .) auf einem neuen Blatt. Name, Vorname und Matrikelnummer jeweils nicht vergessen.

1 Wissen

1.1 Quantenmechanik (30 P.)

a. Wie lauten die zeitabhängige Schrödingergleichung, der Hamiltonoperator der freien Bewegung, seine Eigenzustände, deren Ortsdarstellung und die allgemeinen zeitabhängigen Lösungen der freien Bewegung in einer Raumdimension (5 P.)?

b. Das Quantensystem sei im Zustand $|\, s_z +\rangle$ prapariert. Ein Stern-Gerlach-Versuch misst in x-Richtung. Erläutern Sie die möglichen Ergebnisse der Messung. Skizze (5 P.).

c. Durch eine spezielle Stern-Gerlach-Apparatur sei das Spin-1/2-System im Zustand $|\, \alpha \,\rangle = 0.8\,|\, s_z +\rangle - 0.6\,|\, s_z -\rangle$ präpariert. Wie lautet der Erwartungswert des Operators $\underset{\sim}{s}_z$ bezüglich $|\, \alpha \,\rangle$ (5 P.)?

d. Drei Drehimpulse $j_1 = 1$, $j_2 = 2$ und $j_3 = 3$ werden gekoppelt. Welche Gesamtdrehimpulse können auftreten und mit welchen Multiplizitäten? Überprüfen Sie Ihre Rechnung anhand der Dimension des Hilbertraumes (5 P.).

e. Wie lauten der Hamiltonoperator und die Energieeigenwerte des dreidimensionalen anisotropen harmonischen Oszillators (5 P.)?

f. Erläutern Sie die Idee des Ritzschen Variationsverfahrens. Welche wichtige Eigenschaft hat die Lösung (5 P.)?

2 Können

2.1 Hermitesche Operatoren (15 P.)

a. Geben Sie die Definition für einen hermiteschen Operator an (5 P.).

b. Beweisen Sie, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell sind. Betrachten Sie dazu die Differenz aus

$$\langle\, a_m \,|\, \underset{\sim}{A} \,|\, a_n \,\rangle = a_n \langle\, a_m \,|\, a_n \,\rangle \tag{1}$$

und

$$\langle\, a_m \,|\, \underset{\sim}{A}^\dagger \,|\, a_n \,\rangle = a_m^* \langle\, a_m \,|\, a_n \,\rangle \;. \tag{2}$$

Die Vektoren $|\, a_n \,\rangle$ seien die Eigenzustände von $\underset{\sim}{A}$ (5 P.).

c. Beweisen Sie, dass die Eigenvektoren eines hermiteschen Operators, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, orthogonal sind. Dazu können Sie die schon berechnete Differenz benutzen (5 P.).

2.2 Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren (15 P.)

Aus dem System von Potenzfunktionen $|\, f_n \,\rangle$ mit $\{f_n(x) = \langle\, x \,|\, f_n \,\rangle = x^n | n = 0, 1, 2, \dots\}$ lässt sich in $C^0([a,b],\mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle\, f \,|\, g \,\rangle \quad = \quad \int_a^b \mathrm{d}x \; f^*(x)\, g(x) \tag{3}$$

nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren ein Orthogonalsystem von Polynomen bilden. Für den hier betrachteten Fall seien $a = -1$ und $b = 1$.
Bestimmen Sie die ersten vier orthogonalen Polynome $|\, g_n \,\rangle, n = 0, 1, 2, 3$ sowie ihre Ortsdarstellung.

2.3 δ-Potential (15 P.)

Extrem kurzreichweitige Kräfte werden in der Quantenmechanik oft durch ein Potential beschrieben, das die folgende Form

$$V(x) \quad = \quad \alpha\, \delta(x) \tag{4}$$

besitzt. α ist dabei eine reelle Konstante.

a. Leiten Sie die Stetigkeitsbedingung für die Wellenfunktion bei $x = 0$ her, indem Sie über ein kleines Intervall um Null integrieren und anschließend die Intervalllänge gegen Null gehen lassen (5 P.).

b. Bestimmen Sie für $\alpha > 0$ den Transmissions- und den Reflexionskoeffizienten für eine von links einlaufende ebene Welle (5 P.).

c. Bestimmen Sie alle gebundenen Zustände sowie die zugehörigen Energieeigenwerte für $\alpha < 0$ (5 P.).

3 Weiterdenken

3.1 Eindimensionaler Harmonischer Oszillator (20 P.)

a. Für die folgende Linearkombination aus Grundzustand und erstem angeregten Zustand, $|\,\Psi(t=0)\,\rangle = 1/\sqrt{2}(\,|\,\phi_0\,\rangle + \,|\,\phi_1\,\rangle)$, berechne man formelmäßig die Zeitentwicklung des mittleren Ortes sowie des mittleren Impulses (10 P.).

b. Überprüfen Sie, ob Ihre Lösung für den Ortserwartungswert das Ehrenfest-Theorem erfüllt (10 P.).

3.2 Ritzsches Variationsverfahren (20 P.)

Der Hamiltonoperator eines eindimensionalen anharmonischen Oszillators habe die folgende Form:

$$\underset{\sim}{H} \quad = \quad \frac{\underset{\sim}{p}^2}{2m} + \lambda\, \underset{\sim}{x}^4 \; . \tag{5}$$

Bestimmen Sie approximativ die Grundzustandsenergie mit der Variationswellenfunktion

$$\phi(x) \quad = \quad c \exp\left\{-\alpha x^2\right\} \; . \tag{6}$$

Normieren Sie dazu zuerst die Wellenfunktion.

Es können 115 Punkte erreicht werden.

Noten

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow 5.0$
- $51 \leq P \leq 55 \Rightarrow 4.0$
- $56 \leq P \leq 60 \Rightarrow 3.7$
- $61 \leq P \leq 65 \Rightarrow 3.3$
- $66 \leq P \leq 70 \Rightarrow 3.0$
- $71 \leq P \leq 75 \Rightarrow 2.7$
- $76 \leq P \leq 80 \Rightarrow 2.3$
- $81 \leq P \leq 85 \Rightarrow 2.0$
- $86 \leq P \leq 90 \Rightarrow 1.7$
- $91 \leq P \leq 95 \Rightarrow 1.3$
- $96 \leq P \leq \infty \Rightarrow 1.0$

Viel Erfolg!