

Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Theoretische Physik II SS 2020	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de
--	-----------------------------------	---

**Bitte jede Aufgabe (1.1, 2.1, 2.2, ...) auf einem neuen Blatt.
Name, Vorname und Matrikelnummer jeweils nicht vergessen.**

1 Wissen

1.1 Quantenmechanik (30 P.)

- Wie lauten die stationäre und die zeitabhängige Schrödingergleichung (2 P.)?
- Ein System sei im Zustand $|\phi\rangle$ präpariert. Die Observable $\hat{A}$ soll gemessen werden. Erklären Sie kurz die Messaktiome der Quantenmechanik sowie die Begriffe Erwartungswert und Messwert (5 P.)?
- Durch eine spezielle Stern-Gerlach-Apparatur sei das Spin-1/2-System im Zustand $|\alpha\rangle = 0.6 |s_z +\rangle + 0.8 |s_z -\rangle$ präpariert. Wie lautet der Erwartungswert des Operators $\hat{s}_z$ bezüglich $|\alpha\rangle$ (5 P.)?
- Wie lauten die Kommutatorrelationen und Eigenwertgleichungen für Drehimpulse? Welche Werte können die zugehörigen Quantenzahlen annehmen (5 P.)?
- Wie lautet die allgemeine Unbestimmtheitsrelation? Erläutern Sie die vorkommenden Größen (3 P.).
- Wie lauten der Hamiltonoperator und die Energieeigenwerte des eindimensionalen harmonischen Oszillators (3 P.)?
- Wie lauten der Hamiltonoperator und die Energieeigenwerte des Wasserstoffproblems? Geben Sie die Entartung der Energieniveaus an, wenn man den Spin (und die anderen relativistischen und quantenfeldtheoretischen Korrekturen) nicht berücksichtigt (5 P.)?
- Wie lauten die Korrekturen der Energieeigenwerte in erster Ordnung nichtentarteter Störungstheorie (2 P.)?

2 Können

2.1 Unendlich hohes Kastenpotential & Zeitentwicklung (15 P.)

- Leiten Sie die Energieeigenwerte und -eigenfunktionen des unendlich hohen Kastenpotentials her. Stellen Sie zuerst den Hamiltonoperator auf, definieren Sie Bereiche und geben Sie die Randbedingungen an (10 P.).
- Beschreiben Sie formelmäßig die Zeitentwicklung eines beliebigen Zustandes $|\Psi(t)\rangle$ für einen beliebigen zeitunabhängigen Hamiltonoperator. Wie lautet allgemein die Spektraldarstellung des Zeitentwicklungsoperators? Wie lautet die allgemeine zeitabhängige Lösung $|\Psi(t)\rangle$, wenn sich das System zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|\Psi(0)\rangle$ befunden hat (5 P.)?

2.2 Gaußsches Wellenpaket (15 P.)

Die Wellenfunktion des Gaußschen Wellenpakets in einer Raumdimension lautet

$$\langle x | \phi \rangle = c \exp \left\{ -\frac{(x - x_0)^2}{2a} + i \frac{x p_0}{\hbar} \right\} . \quad (1)$$

a , x_0 und p_0 sind dabei reell, $a > 0$.

- Bestimmen Sie die Normierungskonstante c (5 P.).
- Berechnen Sie die Erwartungswerte des Ortsoperators und des Impulsoperators, d.h. den mittleren Ort und den mittleren Impuls (10 P.).

2.3 Grundzustand im H-Atom (15 P.)

- Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom, indem Sie den folgenden Ansatz für die Wellenfunktion einsetzen:

$$\psi(\vec{x}) = e^{-\kappa|\vec{x}|} , \quad |\vec{x}| = r , \quad \kappa > 0 . \quad (2)$$

Nutzen Sie Symmetrien (10 P.).

- Bestimmen Sie die Normierungskonstante (5 P.).

3 Weiterdenken

3.1 Wechselwirkung zwischen drei Spins (20 P.)

Wir betrachten drei Spins mit je $s = 1$. Ihre effektive Spin-Spin-Wechselwirkung werde durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben:

$$\tilde{H} = -\frac{2J}{\hbar^2} \left(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 \right) . \quad (3)$$

- Bestimmen Sie die Energieeigenwerte dieses Hamiltonoperators sowie deren Entartung. Begründen Sie Ihr Vorgehen (10 P.).
- Nehmen Sie jetzt die Wechselwirkung mit einem äußeren homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ hinzu:

$$\tilde{H}_{\text{Zeeman}} = \frac{g \mu_B}{\hbar} \vec{B} \cdot \vec{S} . \quad (4)$$

Stellen Sie die Energieeigenwerte des Gesamthamiltonoperators als Funktion des äußeren Feldes B graphisch dar (10 P.).

3.2 Spinpräzession (20 P.)

Ein Spin mit Spinquantenzahl s bewege sich im homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

- Geben Sie den Hamiltonoperator und seine Spektraldarstellung an (5 P.).
- Zur Zeit $t = 0$ laute der Erwartungswert des Spinoperators

$$\langle \Psi(0) | \vec{S} | \Psi(0) \rangle = \vec{s}_0 . \quad (5)$$

Berechnen Sie den Erwartungswert von $\vec{S}$ für beliebige Zeiten t (15 P.).

Es können 115 Punkte erreicht werden.

Noten

- $0 \leq P \leq 50 \Rightarrow 5.0$
- $51 \leq P \leq 55 \Rightarrow 4.0$
- $56 \leq P \leq 60 \Rightarrow 3.7$
- $61 \leq P \leq 65 \Rightarrow 3.3$
- $66 \leq P \leq 70 \Rightarrow 3.0$
- $71 \leq P \leq 75 \Rightarrow 2.7$
- $76 \leq P \leq 80 \Rightarrow 2.3$
- $81 \leq P \leq 85 \Rightarrow 2.0$
- $86 \leq P \leq 90 \Rightarrow 1.7$
- $91 \leq P \leq 95 \Rightarrow 1.3$
- $96 \leq P \leq \infty \Rightarrow 1.0$

Viel Erfolg!