Aufgabenblatt 10

10.1 Fermionen im harmonischen Oszillator

Wir betrachten N identische und ununterscheidbare Fermionen[1] in einem eindimensionalen harmonischen Oszillatorpotential. Das System soll im kanonischen Ensemble beschrieben werden.

a. Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt

$$Z_N^F(T,\omega) \;=\; \sum_{n_1<n_2<\cdots<n_N} e^{-\beta\hbar\omega(n_1+n_2+\cdots+n_N+\frac{N}{2})} = e^{-\beta\hbar\omega\frac{N^2}{2}} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-e^{-n\beta\hbar\omega}} \ . \quad (1)$$

b. Zeigen Sie, dass die Grundzustandsenergie $E_0(N) = \hbar\omega\frac{N^2}{2}$ ist. Begründen Sie dies evtl. mit einer Skizze.

c. Leiten Sie die innere Energie $U_N^F(T,\omega)$ her und vergleichen Sie mit der Vorlesung.

d. Leiten Sie die Wärmekapazität $C_N^F(T,\omega)$ her und vergleichen Sie mit der Vorlesung.

e. Stellen Sie die Wärmekapazität $C_N^F(T,\omega)$ für $N = 10$ als Funktion von $\beta\hbar\omega$ dar und stellen Sie zum Vergleich auch die Wärmekapazität $C_N(T,\omega)$ für 10 unterscheidbare Teilchen dar.

10.2 Bosonen im dreidimensionalen harmonischen Oszillator

Wenn die Dimension des Teilchencontainers kleiner Zwei ist, tritt keine Bose-Einstein-Kondensation auf. Im folgenden wollen wir kanonische Ensemble von N Bosonen im dreidimensionalen harmonischen Oszillator betrachten. Wie aus der Theorie von Yang und Lee bekannt, kann man die mit dem Phasenübergang verbundene Nichtanalytizität der Wärmekapazität nur für $N \to \infty$ beobachten. Nichtsdestotrotz zeigt die Wärmekapazität schon für verhältnismäßig kleine N ein ausgeprägtes Maximum, das sich für $N \to \infty$ zur Nichtanalytizität entwickeln wird.

[1] Da Fermionen einen Spin besitzen, haben sie auch mehrere mögliche m_s-Zustände, die man berücksichtigen müsste. Damit man den Spin im weiteren nicht mehr zu berücksichtigen braucht, nehmen wir in diesem Beispiel an, dass alle dieselbe m_s-Quantenzahl besitzen. Man kann das zum Beispiel durch hohe Magnetfelder erreichen, dann sind die Fermionen spinpolarisiert. Ein solcher Fall wird in der Literatur witzigerweise auch „spinlose Fermionen“ genannt.

a. Geben Sie den Hamiltonoperator für ein Teilchen im isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillator an. Isotrop bedeutet hier, daß die Frequenz in alle drei Raumrichtungen gleich ist. Wie lauten die Energieeigenwerte und wie lautet die Zustandssumme?

b. Betrachten Sie jetzt N unterscheidbare Teilchen im dreidimensionalen harmonischen Oszillator. Wie lauten Zustandssumme, innere Energie und Wärmekapazität?

c. Die Zustandssumme für N Bosonen im dreidimensionalen harmonischen Oszillator kann nicht mehr in kurzer geschlossener Form angegeben werden. Man kann aber eine Rekursionsrelation für die Zustandssumme herleiten, mit der man die Zustandssummen sukzessive von $N = 1$ bis zum gewünschten N erzeugen kann. Die Rekursionsrelation lautet

$$Z_N(\beta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_1(n\beta)\, Z_{N-n}(\beta) \;, \quad Z_0(\beta) = 1 \;,\; \beta = \frac{1}{k_B T} \;. \tag{2}$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Formel die Zustandssumme, die innere Energie und die Wärmekapazität für $N = 6$. Nutzen Sie dazu ein Computeralgebraprogramm (Mathematica, Maple). Stellen Sie die Wärmekapazität zusammen mit der für 6 unterscheidbare Teilchen graphisch dar. Sie sollten in der bosonischen Kurve das Maximum sehen, das auf den Phasenübergang hindeutet.

Wählen Sie vernünftige Einheiten: „Verheiraten“ Sie $\hbar$, ω und k_B zu einer Konstanten, die Sie als Einheit der Temperatur verwenden.

Falls Ihr Computer das hergibt, lohnt es sich, die Entwicklung bis z. B. $N = 10$ voranzutreiben.

d. Die Rekursionsformel gilt für alle Dimensionen. Sie müssen nur $Z_1(\beta)$ entsprechend anpassen. Wenn Sie jetzt die Rechnung für ein, zwei oder drei Dimensionen durchführen, werden Sie an der Wärmekapazität erkennen, dass es erst ab zwei Dimensionen einen Phasenübergang gibt.