Universität Bielefeld Fakultät für Physik	Aspekte der Vielteilchenphysik WS 2019/2020	Prof. Dr. Jürgen Schnack jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 7

7.1 Translationsoperator und Fouriertransformation

Wir können die Basiszustände im Einmagnonenraum $|\,0\ldots010\ldots0\,\rangle$ auch als $|\,n\,\rangle$ bezeichnen, wobei die natürliche Zahl $n+1$ die Stelle bezeichnet, an der in der ersten Schreibweise die 1 steht, d.h. $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Der Translationsoperator $\underset{\sim}{T}$ wirkt dann wie folgt

$$\underset{\sim}{T}\,|\,n\,\rangle \;=\; |\,n+1\,\rangle\ , \tag{1}$$

wobei periodische Randbedingungen gelten sollen.
Rekapitulieren Sie die Eigenwerte von $\underset{\sim}{T}$

$$\chi_k \;=\; \exp\left\{-i\frac{2\pi k}{N}\right\}\ , \quad k = 0, \ldots, N-1 \tag{2}$$

sowie die Eigenvektoren

$$|\,k\,\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left\{i\frac{2\pi k n}{N}\right\}\,|\,n\,\rangle\ . \tag{3}$$

Zeigen Sie: Die Vektoren $\{\,|\,k\,\rangle\}$ sind Eigenzustände von $\underset{\sim}{T}$ zum Eigenwert χ_k und bilden eine ONB. Zeigen Sie dazu zuerst

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left\{-i\frac{2\pi n(k-\ell)}{N}\right\} \;=\; \delta_{k\ell}\ . \tag{4}$$

7.2 Grundzustandsimpulsquantenzahlen antiferromagnetischer Heisenberg-Spinringe

a. Lesen Sie K. Bärwinkel, P. Hage, H.-J. Schmidt, J. Schnack, *Quantum numbers for relative ground states of antiferromagnetic Heisenberg spin rings,* Phys. Rev. B **68** (2003) 054422.

b. Finden Sie den Tippfehler in Gleichung (1).

c. Berechnen Sie die Grundzustandsquantenzahl für einen Ring mit $N = 4$ und $s = 1/2$ mit der korrigierten Formel (1) und vergleichen Sie mit der Vorlesung.

d. Wie lauten die magnetische Quantenzahl und die Grundzustandsquantenzahl für einen Spinring mit $N = 7$ und $s = 5/2$? Wie hoch ist folglich die Entartung?

e. Ist Formel (1) mathematisch bewiesen?