Bitte Zahlen, aber alle!

Jürgen Schnack

Fakultät für Physik – Universität Bielefeld

http://obelix.physik.uni-bielefeld.de/∼schnack/

Preisverleihung – Mathematikolympiade Kreis Gütersloh, 10.02.2026

Herzlichen

Glückwunsch

Ihr seid super!

Herzlichen Dank an Herrn Venz,

alle Mathelehrerinnen

und alle Mathelehrer

und einen unendlichen Applaus!

Liebe Eltern (insbesondere die Väter),

auch wenn es Ihnen auf der Zunge liegt:

SIE DÜRFEN HEUTE NICHT VORSAGEN!

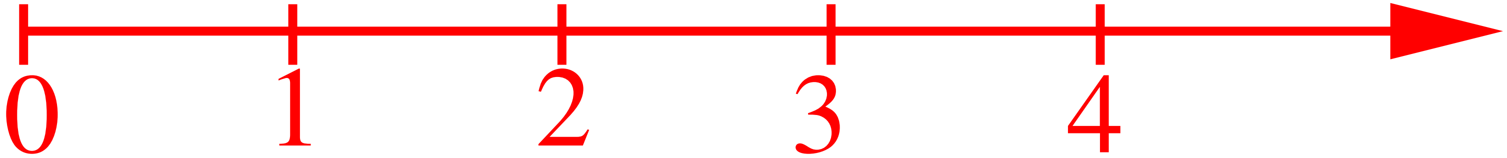
Wir wollen heute über alle Zahlen reden.

Alle Zahlen!

Habt Ihr etwas Zeit mitgebracht?

Und wir wollen Aussagen beweisen.

Das ist in der Mathematik das Wichtigste.



Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,

12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,
21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, ...

Wie kann man beweisen,

dass es unendlich viele

natürliche Zahlen gibt?

Widerspruchsbeweis:

Wir nehmen an, dass es eine größte natürliche Zahl n gibt. Dann kann ich aber immer den Nachfolger $(n + 1)$ bilden! Also muss meine Annahme falsch gewesen sein. Es gibt also keine größte natürliche Zahl!

Einige natürliche Zahlen sind

prim.

Was war das denn noch mal?

Gibt es eine größte Primzahl?

Die werden doch immer seltener!

Widerspruchsbeweis

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \quad \cdots \quad \cdot p_{\mathsf{max}} + 1$$

ist durch keine Primzahl kleiner oder gleich p_{max}

teilbar, ist also selbst Primzahl oder

durch eine Primzahl größer p_{max} teilbar.

Gibt es eigentlich mehr durch 3 teilbare oder mehr durch 4 teilbare natürliche Zahlen?

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \ldots$$

$$4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, \ldots$$

(Abstimmung)

Ein neuer Begriff für

„mehr“

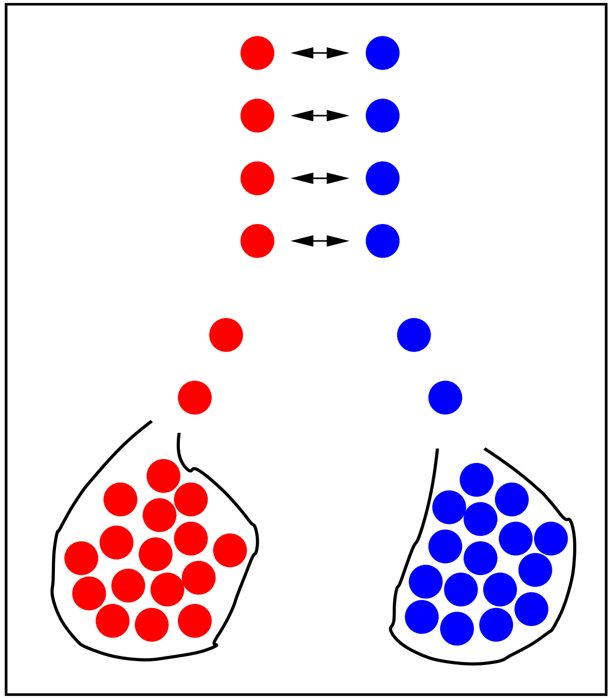
„weniger“

„gleich viel“

muss her!

Mächtigkeit

Gleichmächtig



Zwei Mengen sind gleichmächtig, wenn man jedem Element der einen Menge genau eines der anderen Menge zuordnen kann.

Bei endlichen Mengen heißt „gleichmächtig“ auch „gleich viel“.

Bei unendlichen Mengen passieren ungewöhnliche Dinge!

durch 3 teilbar durch 4 teilbar

$$\begin{array}{rcl} 3 & \Leftrightarrow & 4 \\ 6 & \Leftrightarrow & 8 \\ 9 & \Leftrightarrow & 12 \\ 12 & \Leftrightarrow & 16 \\ 15 & \Leftrightarrow & 20 \\ & \ldots & \end{array}$$

$\Rightarrow$ aha, gleichmächtig!

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

. . . , -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -3, -2,
-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, . . .

Fahrstuhl, Thermometer

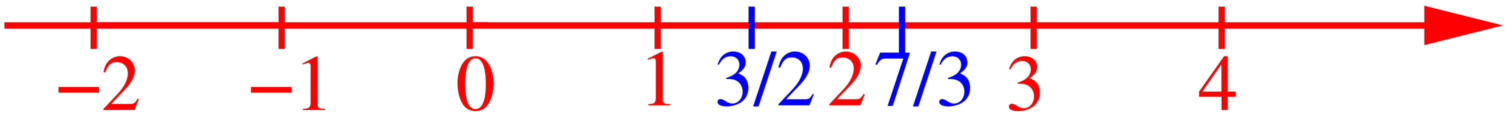
Gibt es eigentlich mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen?

(Abstimmung)

$\mathbf{N}$		$\mathbf{Z}$
0	$\Leftrightarrow$	0
1	$\Leftrightarrow$	1
2	$\Leftrightarrow$	-1
3	$\Leftrightarrow$	2
4	$\Leftrightarrow$	-2

$\ldots$

$\Rightarrow$ aha, gleichmächtig!



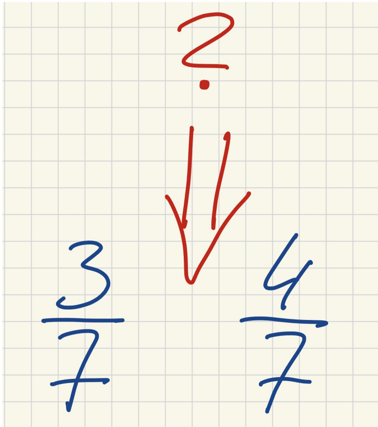
Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

$\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$

Hat eine rationale Zahl Nachbarn?

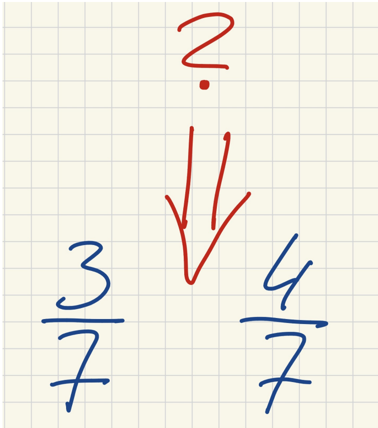
?

$$\frac{3}{7} \quad \Downarrow \quad \frac{4}{7}$$



$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\right)$$

liegt dazwischen.



$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\right)$$

liegt dazwischen.

Die rationalen Zahlen liegen **dicht**. $\Rightarrow$ Ganz schön viele!

Man kann sie durchzählen!

Dieses Schema zählt man dann diagonal ab, wobei man nicht vollständig gekürzte Brüche überspringt:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\frac{1}{1}\ (1) & \rightarrow & \frac{1}{2}\ (2) & & \frac{1}{3}\ (5) & \rightarrow & \frac{1}{4}\ (6) & & \frac{1}{5}\ (11) & \rightarrow \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\frac{2}{1}\ (3) & & \frac{2}{2}\ (\cdot) & & \frac{2}{3}\ (7) & & \frac{2}{4}\ (\cdot) & & \frac{2}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
\frac{3}{1}\ (4) & & \frac{3}{2}\ (8) & & \frac{3}{3}\ (\cdot) & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & & & & & \\
\frac{4}{1}\ (9) & & \frac{4}{2}\ (\cdot) & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & \\
\frac{5}{1}\ (10) & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

wikipedia

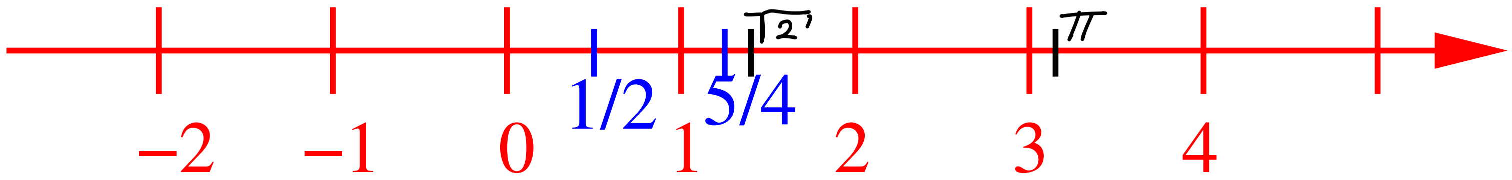
Zum Knobeln für Zuhause

Auch gleichmächtig:

- alle unendlichen Teilmengen der natürlichen Zahlen untereinander!
- alle unendlichen Teilmengen der natürlichen Zahlen und die natürlichen Zahlen!
- die natürlichen Zahlen und die positiven Brüche!
- die natürlichen Zahlen und alle Brüche!
- alle unendlichen Mengen, die man abzählen kann!

Mächtiger als die natürlichen Zahlen: die reellen Zahlen!

Mächtig gewaltig!



Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

$$r \in \mathbb{R}$$

Wie würdet Ihr die definieren?

$$\sqrt{2} =$$

$$1,414213562373095048801688724$$
$$2096980785696718753769480\ldots$$

$$\pi =$$

$$3,141592653589793238462643383$$
$$279502884197169399375105\ldots$$

Potenzmengen und Kontinuumshypothese

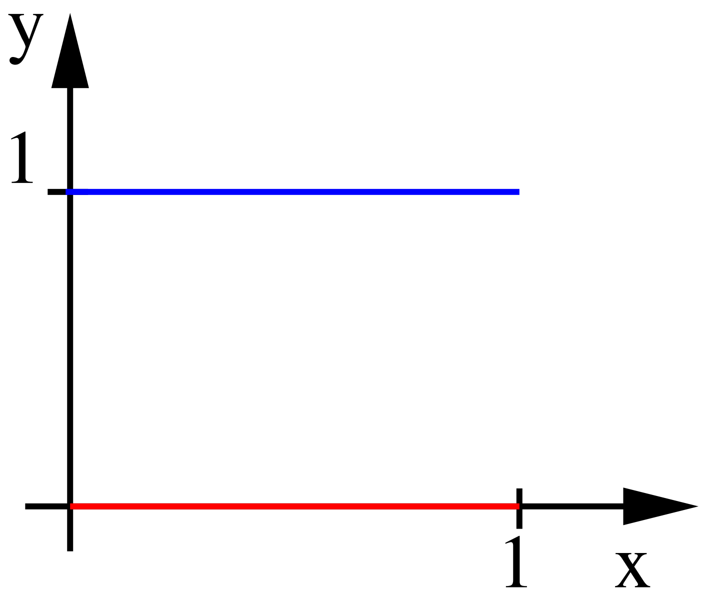
Die Potenzmenge der natürlichen Zahlen ist gleichmächtig zu den reellen Zahlen.

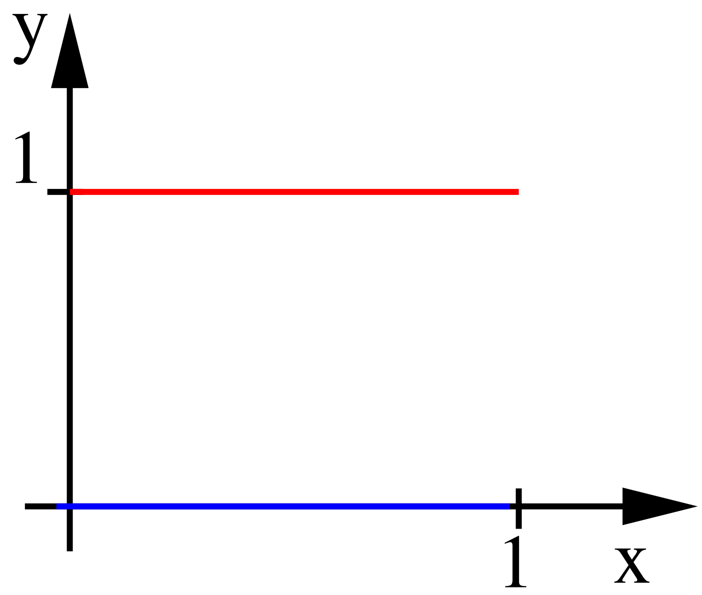
Mächtigkeit der natürlichen Zahlen: $\aleph_0$,
Mächtigkeit der reellen Zahlen: $\aleph_1$.

Kontinuumshypothese: Es gibt keine andere/neue Unendlichkeit zwischen $\aleph_0$ und $\aleph_1$.

Im Rahmen der existierenden Mathematik **NICHT** beweisbar!

Georg Cantor, Kurt Gödel, Alexander Grothendieck, Paul Cohen, . . .





Wir erfinden eine seltsame Funktion:

$f(x) = 1$ für rationale x, sonst 0

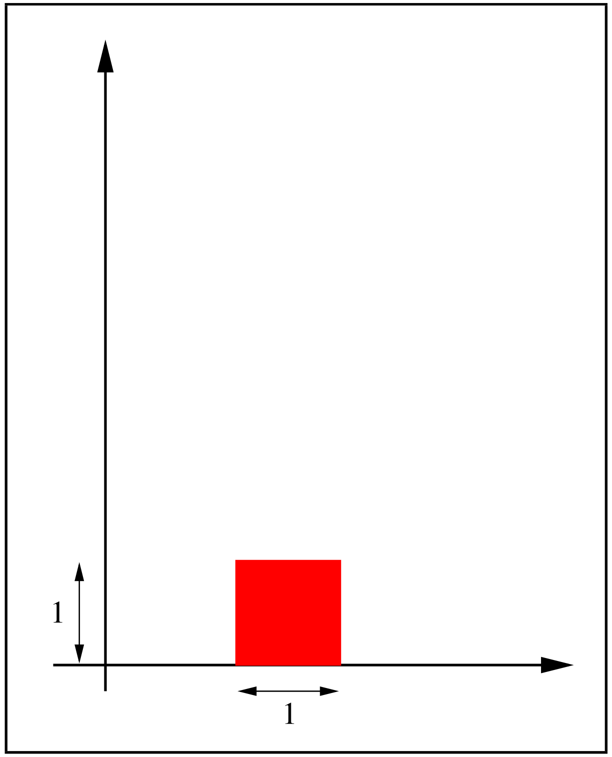
$f(x) = 0$ für rationale x, sonst 1

Wie groß ist das Integral der Funktion zwischen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$?

Einen hab ich noch!

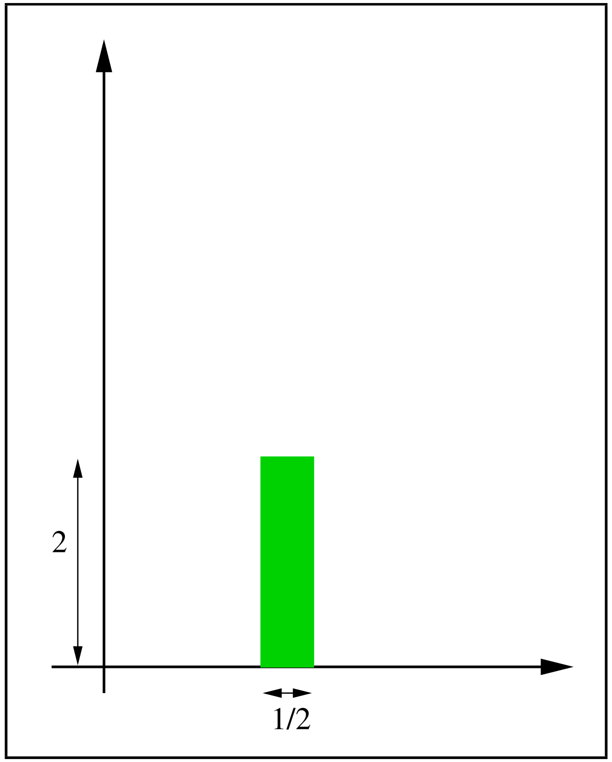
Geht auch „unendlich klein“, aber nicht Null?

Die δ-Funktion



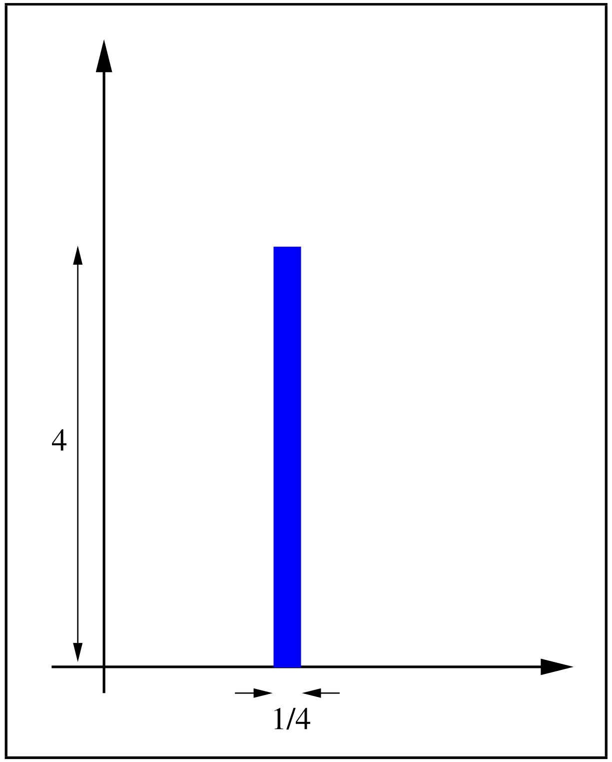
Wie groß ist die Fläche?

Die δ-Funktion



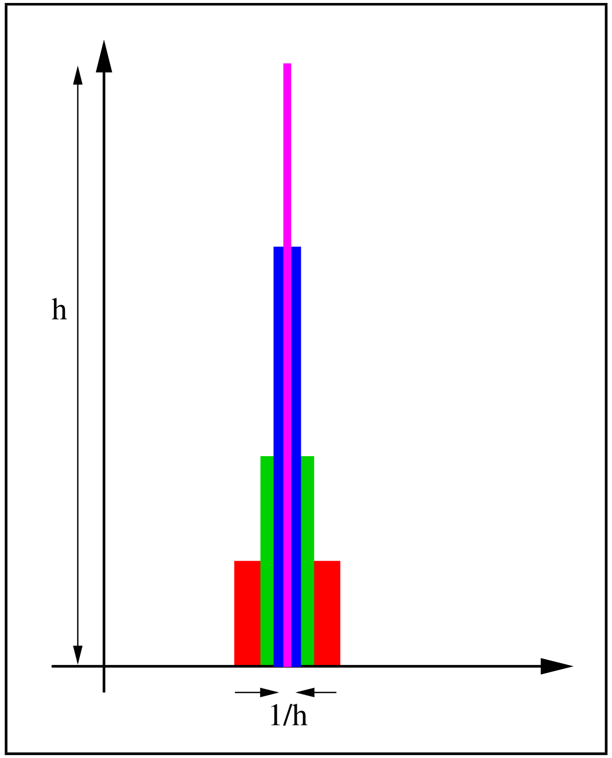
Wie groß ist die Fläche?

Die δ-Funktion



Wie groß ist die Fläche?

Die δ-Funktion



Wenn man jetzt immer so weiter macht:

Gegen welchen Wert geht die Breite?

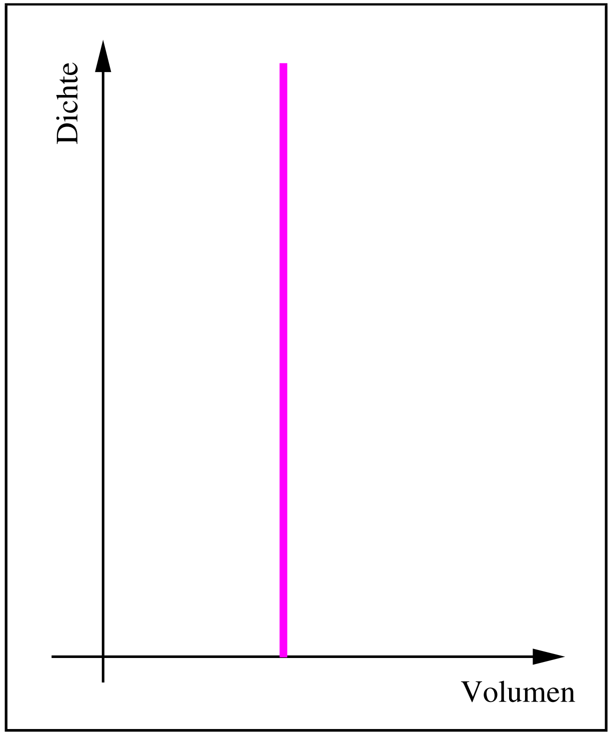
Gegen welchen Wert geht die Höhe?

Gegen welchen Wert geht die Fläche?

Ein typischer Fall von

$$0 \cdot \infty$$

Die δ-Funktion



Die δ-Funktion wurde von dem Physiker Paul Dirac erfunden.$^{(*)}$

Die δ-Funktion ist genau genommen gar keine Funktion, sondern eine sogenannte Distribution, aber wir Physiker rechnen damit, als wäre es eine Funktion.

Mit der δ-Funktion kann man zum Beispiel die Dichte eines Teilchens beschreiben, das keine Ausdehnung hat (Punktteilchen).

Volumen mal Dichte = Masse.

$$\int \mathrm{d}^3x \, m \, \delta^{(3)}(\vec{x}) = m$$

$^{(*)}$ Physiker sind einfach wunderbar!

Das Elektron

Das Elektron ist unendlich klein,
oder?

Schwarze Löcher

Schwarze Löcher sind unendlich klein, oder?

Ihr könnt es herausfinden!

Denn Ihr mögt Mathematik!

Damit könnt Ihr vieles studieren,

z.B.

Physik!

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit