

Unendlich: ∞

Jürgen Schnack

Fakultät für Physik – Universität Bielefeld

<http://obelix.physik.uni-bielefeld.de/~schnack/>

Preisverleihung – Mathematikolympiade Kreis Gütersloh

Online, 28. 1. 2021

Herzlichen
Glückwunsch

Ihr seid super!

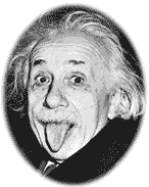
Herzlichen Dank an Herrn Venz,
alle Mathelehrerinnen
und alle Mathelehrer
und einen unendlichen Applaus!

Was meint Ihr,
gibt es ∞
wirklich?



Phaeno, Wolfsburg

Zwei Dinge sind unendlich,
das Universum
und die menschliche Dummheit,
bei dem Universum bin ich mir
noch nicht ganz sicher.



Albert Einstein



ist ein mathematisches Konzept,
mit dem sich wunderbar arbeiten lässt.

Wir werden uns mal ran pirschen.

Die natürlichen Zahlen

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,
12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,
21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, ...

Wie kann man beweisen,
dass es unendlich viele
natürliche Zahlen gibt?

Widerspruchsbeweis:

Wir nehmen an, dass es eine größte natürliche Zahl n gibt. Dann kann ich aber immer den Nachfolger $(n + 1)$ bilden! Also muss meine Annahme falsch gewesen sein. Es gibt also keine größte natürliche Zahl!

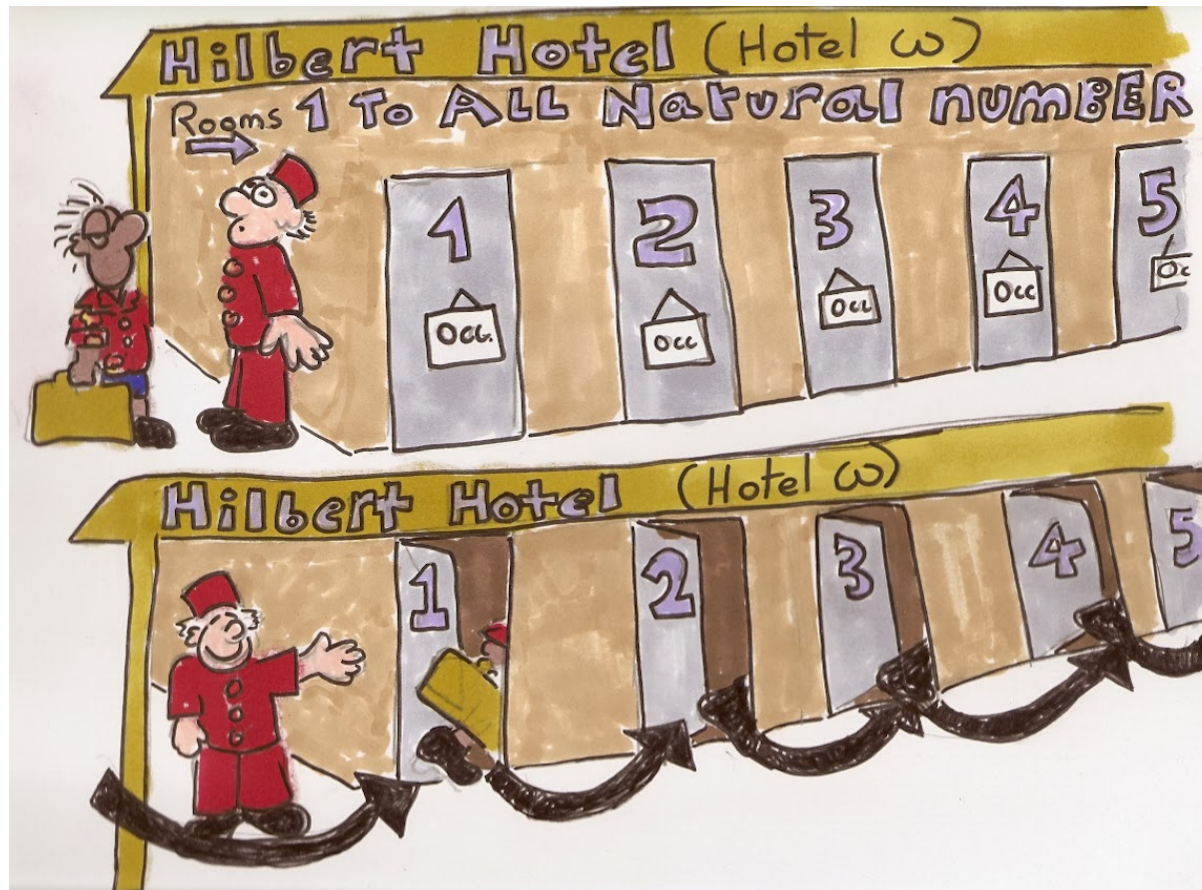
Hotel Hilbert



Das Hotel Hilbert hat unendlich viele Zimmer. Alle sind belegt. Spät abends kommt noch ein Gast und möchte ein Zimmer haben.

„Kein Problem“, sagt David Hilbert, der Besitzer. „Das machen wir so: Sie nehmen das erste Zimmer, der Gast aus dem ersten Zimmer geht ins zweite, der aus dem zweiten geht ins dritte und so weiter!“

Hotel Hilbert



(google-Bilder)

Kann eigentlich noch einer ins Hotel?

Kann eigentlich noch einer ins Hotel?

Und noch einer?

Kann eigentlich noch einer ins Hotel?

Und noch einer?

Und noch einer?

Kann eigentlich noch einer ins Hotel?

Und noch einer?

Und noch einer?

...

∞

Gibt es eigentlich mehr durch 3 teilbare
oder mehr durch 4 teilbare natürliche
Zahlen?

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, ...

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, ...

(Abstimmung)

Ein neuer Begriff für

„mehr“

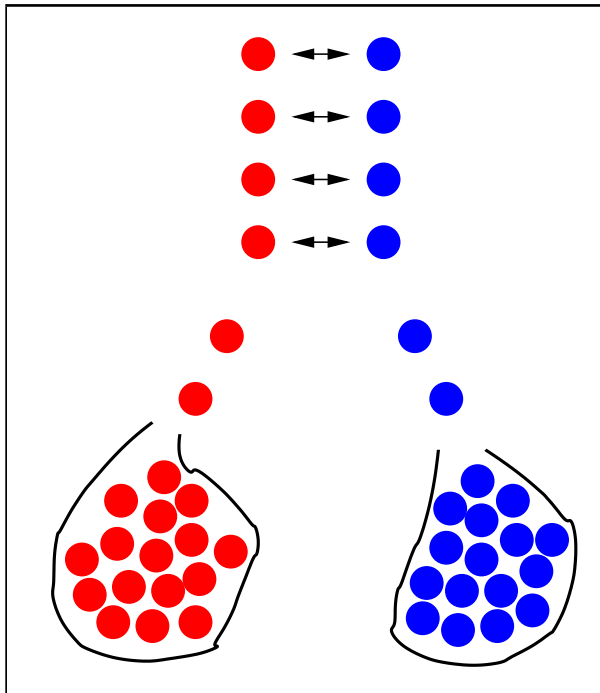
„weniger“

„gleich viel“

muss her!

Mächtigkeit

Gleichmächtig



Zwei Mengen sind gleichmächtig, wenn man jedem Element der einen Menge genau eines der anderen Menge zuordnen kann.

Bei endlichen Mengen heißt „gleichmächtig“ auch „gleich viel“.

Bei unendlichen Mengen passieren ungewöhnliche Dinge!

durch 3 teilbar

durch 4 teilbar

3	$\Leftrightarrow$	4
6	$\Leftrightarrow$	8
9	$\Leftrightarrow$	12
12	$\Leftrightarrow$	16
15	$\Leftrightarrow$	20
...		

$\Rightarrow$ aha, gleichmächtig!

Zum Knobeln für Zuhause

Auch gleichmächtig:

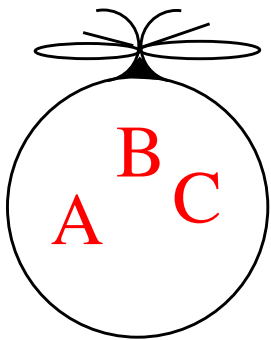
- alle unendlichen Teilmengen der natürlichen Zahlen untereinander!
- alle unendlichen Teilmengen der natürlichen Zahlen und die natürlichen Zahlen!
- die natürlichen Zahlen und die positiven Brüche!

Mächtiger als die natürlichen Zahlen: **die reellen Zahlen!**

Mächtig gewaltig!

Potenzmengen und Kontinuumshypothese

Die Potenzmenge einer Menge ist die Menge aller Teilmengen.

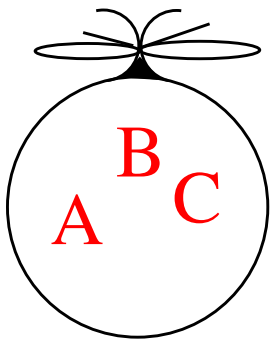


A	B	C	Element der Potenzmenge
0	0	0	$\emptyset$
1	0	0	$\{A\}$
0	1	0	$\{B\}$
1	1	0	$\{A,B\}$
0	0	1	$\{C\}$
1	0	1	$\{A,C\}$
0	1	1	$\{B,C\}$
1	1	1	$\{A,B,C\}$

Wie viele Elemente hat die Potenzmenge? Formel?

Potenzmengen und Kontinuumshypothese

Die Potenzmenge einer Menge ist die Menge aller Teilmengen.



A	B	C	Element der Potenzmenge
0	0	0	$\emptyset$
1	0	0	$\{A\}$
0	1	0	$\{B\}$
1	1	0	$\{A,B\}$
0	0	1	$\{C\}$
1	0	1	$\{A,C\}$
0	1	1	$\{B,C\}$
1	1	1	$\{A,B,C\}$

Wie viele Elemente hat die Potenzmenge? Formel?

$$2^N$$

Potenzmengen und Kontinuumshypothese



Die Potenzmenge der natürlichen Zahlen ist gleichmächtig zu den reellen Zahlen.

Mächtigkeit der natürlichen Zahlen: $\aleph_0$,

Mächtigkeit der reellen Zahlen: $\aleph_1$.

Kontinuumshypothese: Es gibt keine andere/neue Unendlichkeit zwischen $\aleph_0$ und $\aleph_1$.

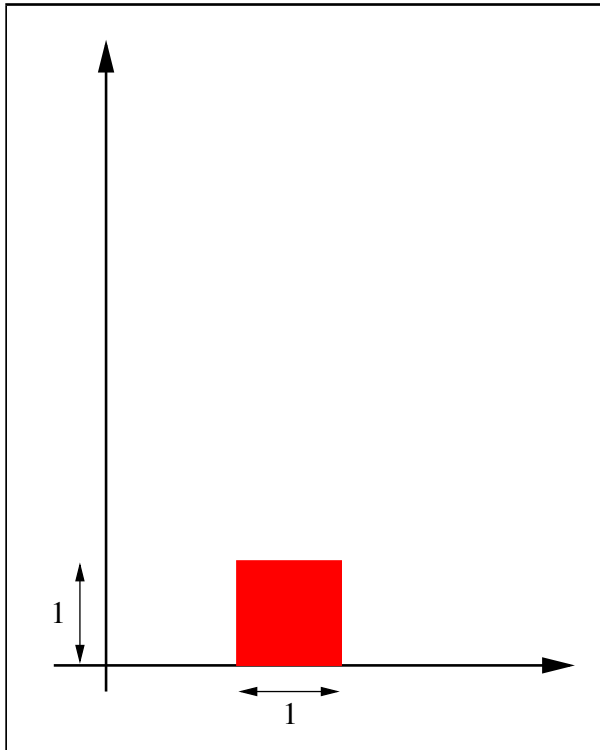
Im Rahmen der existierenden Mathematik **NICHT** beweisbar!

Georg Cantor, Kurt Gödel, Alexander Grothendieck, Paul Cohen, ...

Einen hab ich noch!

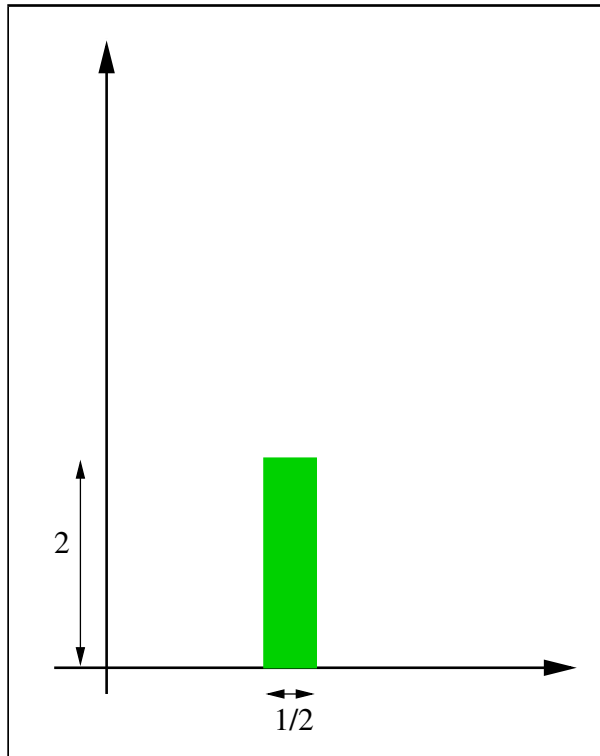
Geht auch „unendlich klein“,
aber nicht Null?

Die δ -Funktion



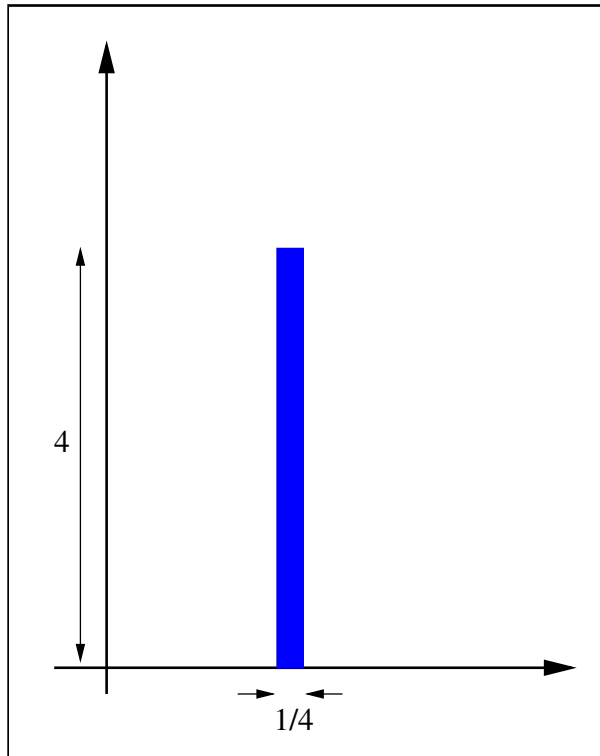
Wie groß ist die Fläche?

Die δ -Funktion



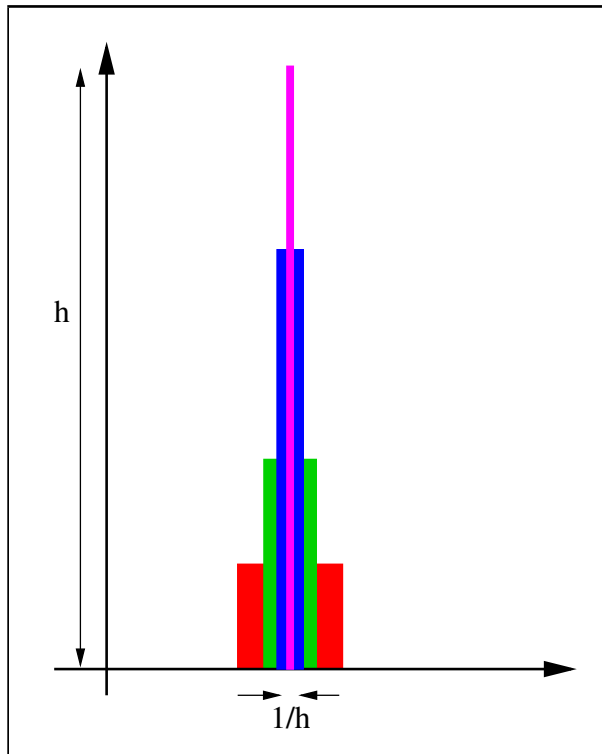
Wie groß ist die Fläche?

Die δ -Funktion



Wie groß ist die Fläche?

Die δ -Funktion



Wenn man jetzt immer so weiter macht:

Gegen welchen Wert geht die Breite?

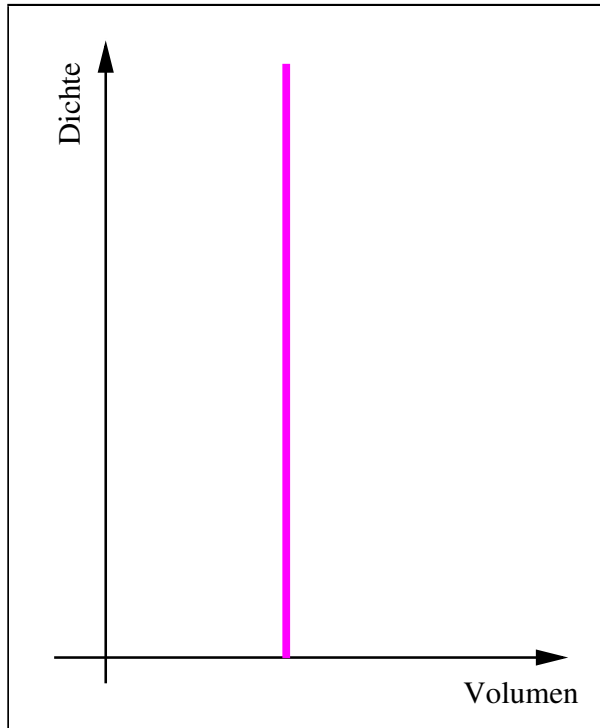
Gegen welchen Wert geht die Höhe?

Gegen welchen Wert geht die Fläche?

Ein typischer Fall von

$$0 \cdot \infty$$

Die δ -Funktion



Die δ -Funktion wurde von dem Physiker Paul Dirac erfunden.^(*)

Die δ -Funktion ist genau genommen gar keine Funktion, sondern eine sogenannte Distribution, aber wir Physiker rechnen damit, als wäre es eine Funktion.

Mit der δ -Funktion kann man zum Beispiel die Dichte eines Teilchens beschreiben, das keine Ausdehnung hat (Punktteilchen).

Volumen mal **Dichte** = Masse.

$$\int d^3x \, m \, \delta^{(3)}(\vec{x}) = m$$

^(*) Physiker sind einfach wunderbar!

Das Elektron

Das Elektron ist unendlich klein,
oder?

Schwarze Löcher

Schwarze Löcher sind unendlich klein, oder?

Ihr könnt es herausfinden!

Denn Ihr mögt Mathematik!

Damit könnt Ihr vieles studieren,
z.B.

Physik!



Vielen Dank für Eure
Aufmerksamkeit