Permutationen

Jürgen Schnack

Fakultät für Physik – Universität Bielefeld

http://obelix.physik.uni-bielefeld.de/∼schnack/

Preisverleihung – Mathematikolympiade Kreis Gütersloh

Städtisches Gymnasium Gütersloh, 07. 02. 2019

Herzlichen

Glückwunsch

Ihr seid super!

Herzlichen Dank an Herrn Venz (und allen, die geholfen haben) und einen tollen Applaus!

Liebe Eltern (insbesondere die Väter),

auch wenn es Ihnen auf der Zunge liegt:

SIE DÜRFEN HEUTE

NICHT VORSAGEN!

Mathematiker wollen oft wissen, wie viele Möglichkeiten es gibt.

Und nicht nur Mathematiker!

Am Ende des heutigen Vortrages
werdet Ihr wissen,
wie viele Möglichkeiten es gibt,
Stress an der Weihnachtstafel
zu verhindern!

Wie viele Möglichkeiten gibt es,

die drei nebeneinander zu stellen?

Wie viele Möglichkeiten gibt es,

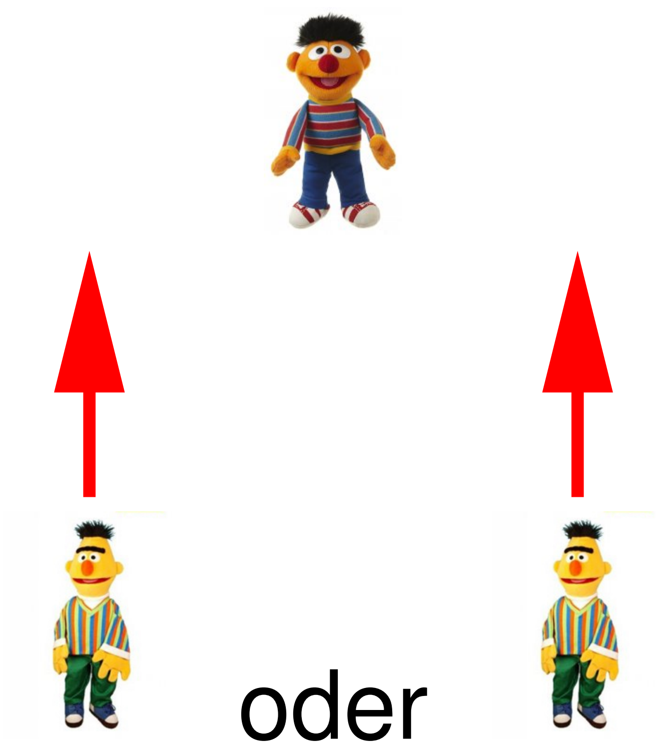
die drei nebeneinander zu stellen?

Wir probieren das aus!

Können wir das verstehen?

Es gibt eine Möglichkeit,

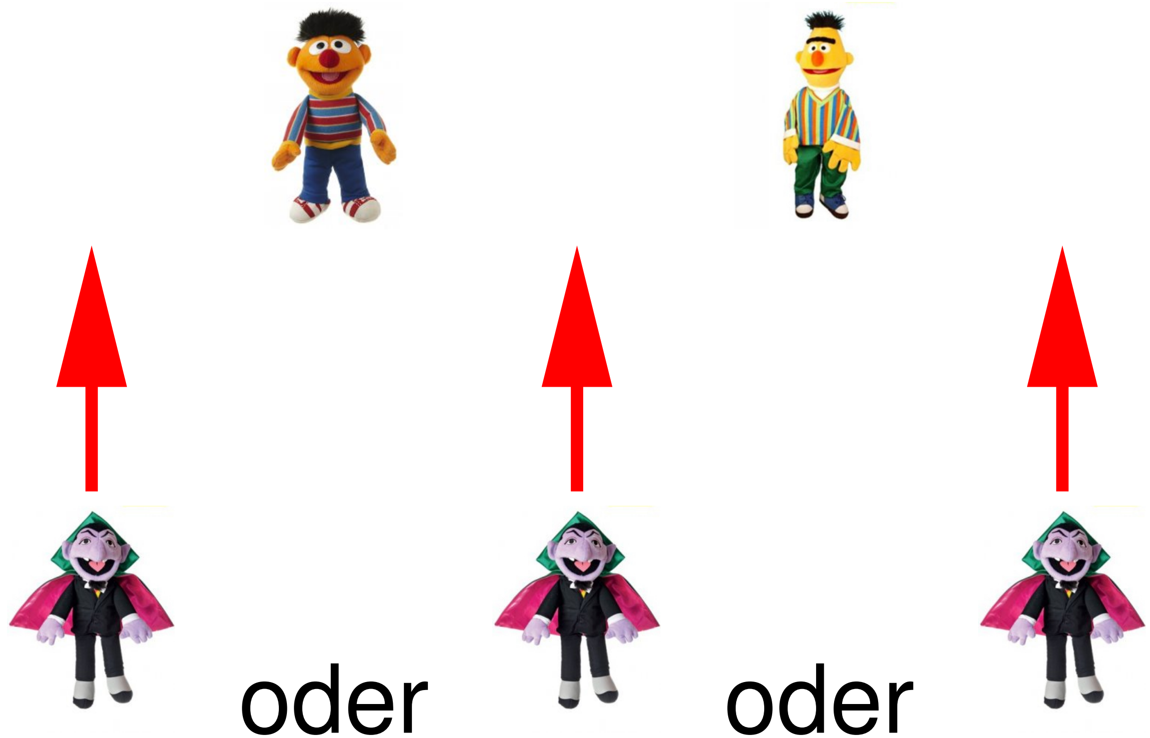
Ernie anzuordnen: 1.



Zu jeder Möglichkeit, Ernie anzuordnen,

gibt es zwei Möglichkeiten, Bert anzuordnen:

$$1 \cdot 2.$$



Zu jeder Möglichkeit, Ernie & Bert anzuordnen,

gibt es drei Möglichkeiten, Graf Zahl anzuordnen:

$$1 \cdot 2 \cdot 3.$$



Wie viele Möglichkeiten gibt es,

die drei nebeneinander zu stellen?

$\Rightarrow$ Es gibt $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten!

? ? ? ? ? ? ?

 oder  oder  oder 

Zu jeder Möglichkeit, Ernie, Bert & Graf Zahl anzuordnen,

gibt es vier Möglichkeiten, Herrn Venz anzuordnen:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$$

Was haben wir bis jetzt gelernt?

Was haben wir bis jetzt gelernt?

Permutation: Anordnung von N Objekten

Was haben wir bis jetzt gelernt?

Permutation: Anordnung von N Objekten

Alle Permutationen von (E B Z):
$\{$(E B Z), (B E Z), (B Z E), (E Z B), (Z E B), (Z B E)$\}$

Was haben wir bis jetzt gelernt?

Permutation: Anordnung von N Objekten

Alle Permutationen von (E B Z):
$\{$(E B Z), (B E Z), (B Z E), (E Z B), (Z E B), (Z B E)$\}$

Genau so alle Permutationen von (1 2 3):
$\{$(1 2 3), (2 1 3), (2 3 1), (1 3 2), (3 1 2), (3 2 1)$\}$

Was haben wir bis jetzt gelernt?

Permutation: Anordnung von N Objekten

Alle Permutationen von (E B Z):
$\{$(E B Z), (B E Z), (B Z E), (E Z B), (Z E B), (Z B E)$\}$

Genau so alle Permutationen von (1 2 3):
$\{$(1 2 3), (2 1 3), (2 3 1), (1 3 2), (3 1 2), (3 2 1)$\}$

Permutationen bilden eine Menge.

Was haben wir bis jetzt gelernt?

Anzahl aller Permutationen von N Objekten:
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots N = N!$

$N!$ heißt „N Fakultät“.

Wie viele Kinder seid Ihr in der Klasse?

Wie viele Möglichkeiten gibt es, Euch aufzustellen?

Wie viele Kinder seid Ihr in der Klasse?

Wie viele Möglichkeiten gibt es, Euch aufzustellen?

Fakultät wächst ziemlich schnell!

Sport, Feuerzangenbowle, Pfeiffer mit drei f!

P f e i f f e r

Wie viele Möglichkeiten gibt es,

die Buchstaben zu sortieren?

P f e i f f e r

Wie viele Möglichkeiten gibt es,

die Buchstaben zu sortieren

so dass gleiche nicht mehrfach zählen?

$$N = 8,\ N_f = 3,\ N_e = 2.$$

$$\frac{N!}{\prod_k N_k!}$$

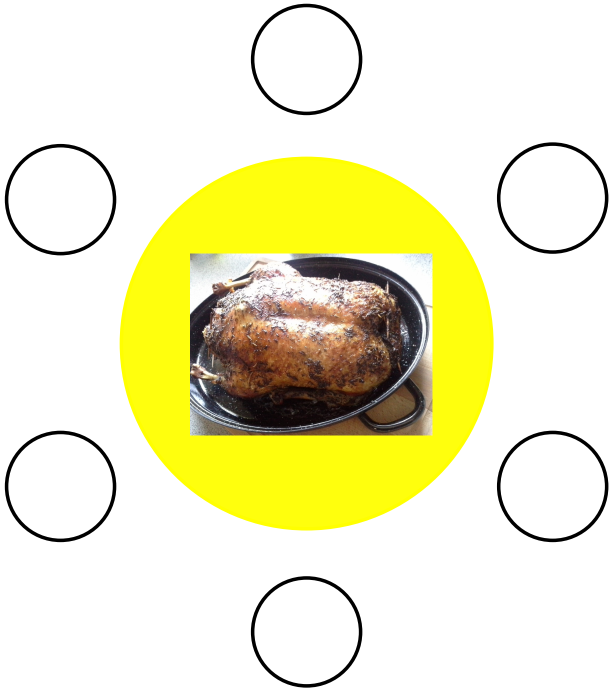
N – Zahl der Objekte,
N_k – Zahl der gleichen Objekte von der Sorte k.

Unser Beispiel:
$N = 8$,
$k = 1$: die f, $N_1 = 3$
$k = 2$: die e, $N_2 = 2$.

$$\frac{N!}{\prod_k N_k!} = \frac{8!}{3! \cdot 2!} = 3360$$

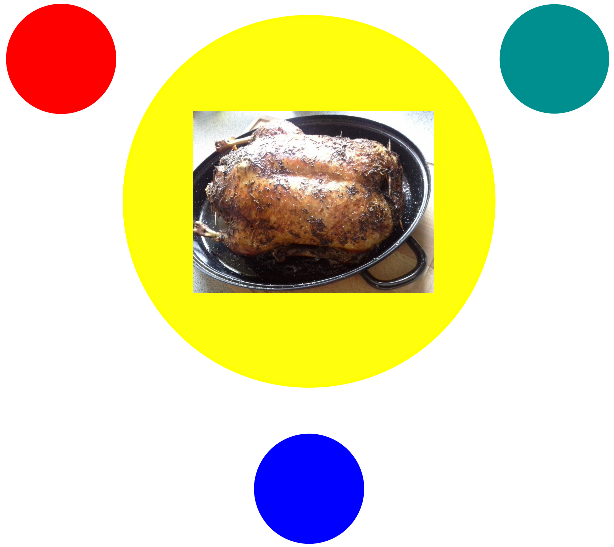
Wie Weihnachten wirklich zu einem Fest des Friedens wird!

Problem of married couples, Edouard Lucas, 1891



Wie kann man N Paare um einen Tisch gruppieren, so dass Frauen und Männer sich abwechseln und Ehefrau nicht neben Ehemann sitzt? $=$ Frieden

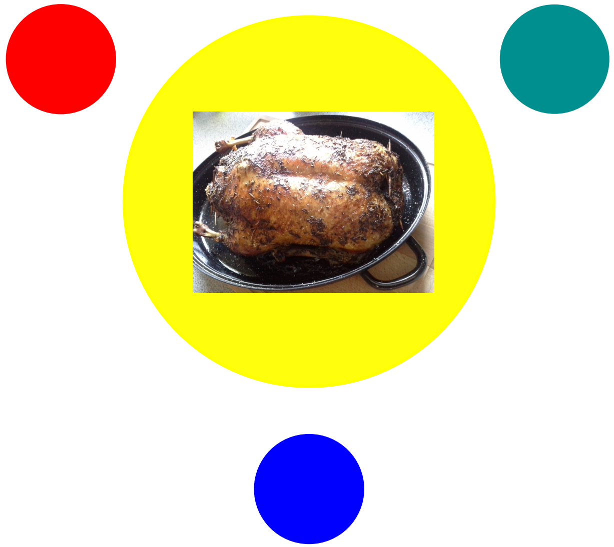
Problem of married couples, Edouard Lucas, 1891



Die Frauen haben sich schon mal hingesetzt.

Dafür gab es noch einmal wie viele Möglichkeiten?

Problem of married couples, Edouard Lucas, 1891

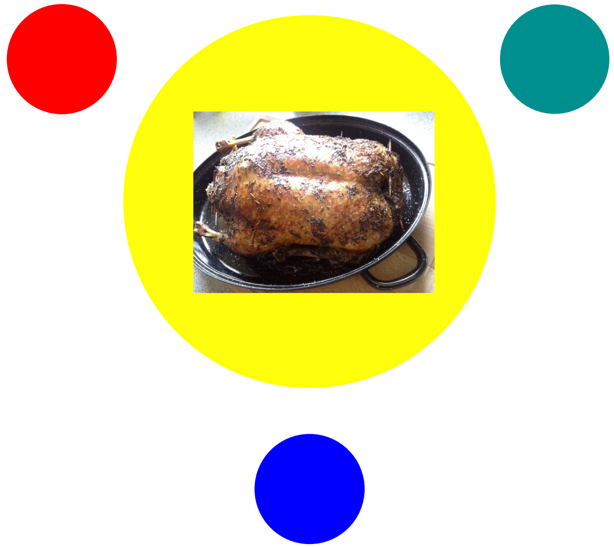


Die Frauen haben sich schon mal hingesetzt.

Dafür gab es noch einmal wie viele Möglichkeiten?

$\Rightarrow 2N!$

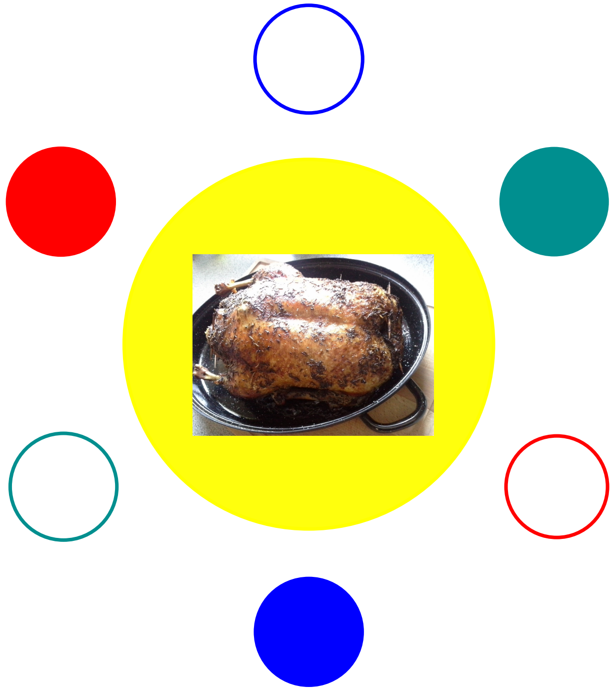
Problem of married couples, Edouard Lucas, 1891



Jetzt die Männer dazu.

Wie viele Möglichkeiten seht Ihr?

Problem of married couples, Edouard Lucas, 1891



Jetzt die Männer dazu.

Wie viele Möglichkeiten seht Ihr?

Richtig: nur eine.

Problem of married couples, Edouard Lucas, 1891

Weiteres Beispiel: $N = 4$ Die Frauen sitzen schon.

Wie viele Möglichkeiten seht Ihr,
die Männer zu platzieren?

Problem of married couples, Edouard Lucas, 1891

Weiteres Beispiel: $N = 4$ Die Frauen sitzen schon.

Wie viele Möglichkeiten seht Ihr,
die Männer zu platzieren?

Richtig: 2.

Lösung von Laisant, Moreau, and Taylor, 1903

$2\ N!\ A_N$ für $N > 1$

$$A_N = 2N! \sum_{k=0}^{N} \frac{2N}{2N-k} \binom{2N-k}{k} (N-k)!\, (-1)^k$$

$$A_2 = 0, A_3 = 1, A_4 = 2, A_5 = 13, A_6 = 80, \ldots$$

Permutationen kommen auf vielen Gebieten vor:

Lineare Algebra (Leibniz-Formel),

Analysis (Umordnung von Reihen),

Graphentheorie und Spieltheorie,

Kryptographie (Verschlüsselungsverfahren),

Informatik (Sortierverfahren),

Quantenmechanik (Pauli-Prinzip).

Approximation der Fakultät

In der statistischen Physik berechnen wir die Entropie.

Diese hat z.B. etwas mit der Zahl der Möglichkeiten zu tun,

Teilchen in einem Volumen anzuordnen.

Zum besseren Rechnen muss man die Fakultät approximieren.

$$N! \approx \sqrt{2\pi N}\,\left(\frac{N}{e}\right)^N$$

Stirling-Formel nach dem schottischen Mathematiker James Stirling

(„hoch“ ist einfacher als Fakultät)

Ihr könnt das nutzen!

Denn Ihr mögt Mathematik!

Damit könnt Ihr Vieles studieren, z.B.

Physik!

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit