Symmetrien

Jürgen Schnack

Department of Physics – University of Bielefeld – Germany

http://obelix.physik.uni-bielefeld.de/∼schnack/

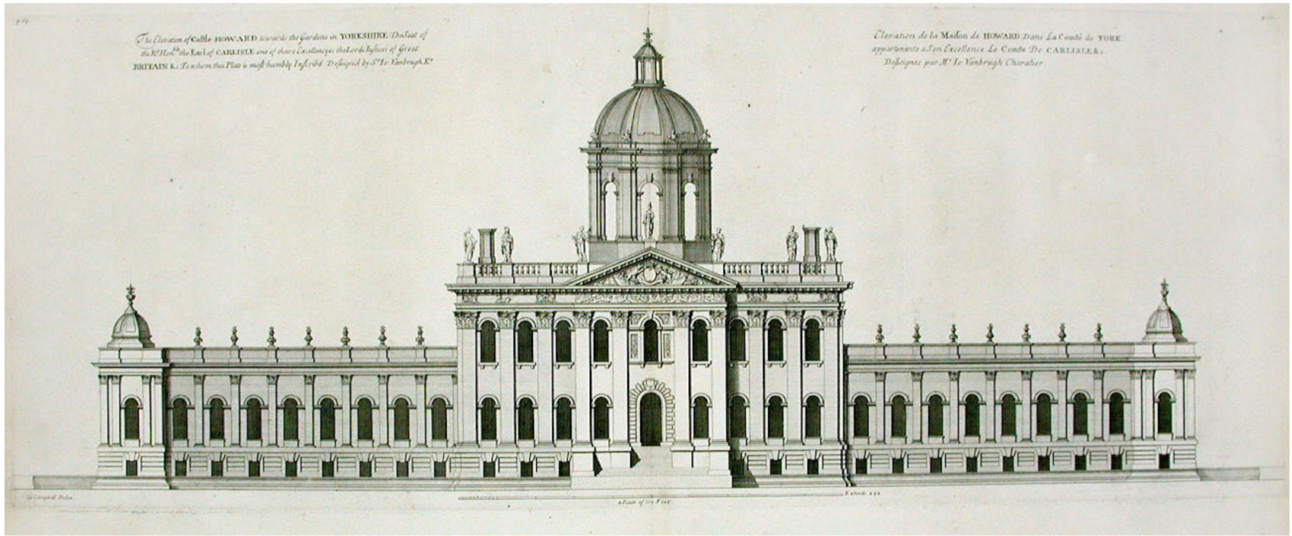
Preisverleihung – Mathematikolympiade Kreis Gütersloh

Städtisches Gymnasium Gütersloh, 5. 2. 2013

Herzlichen

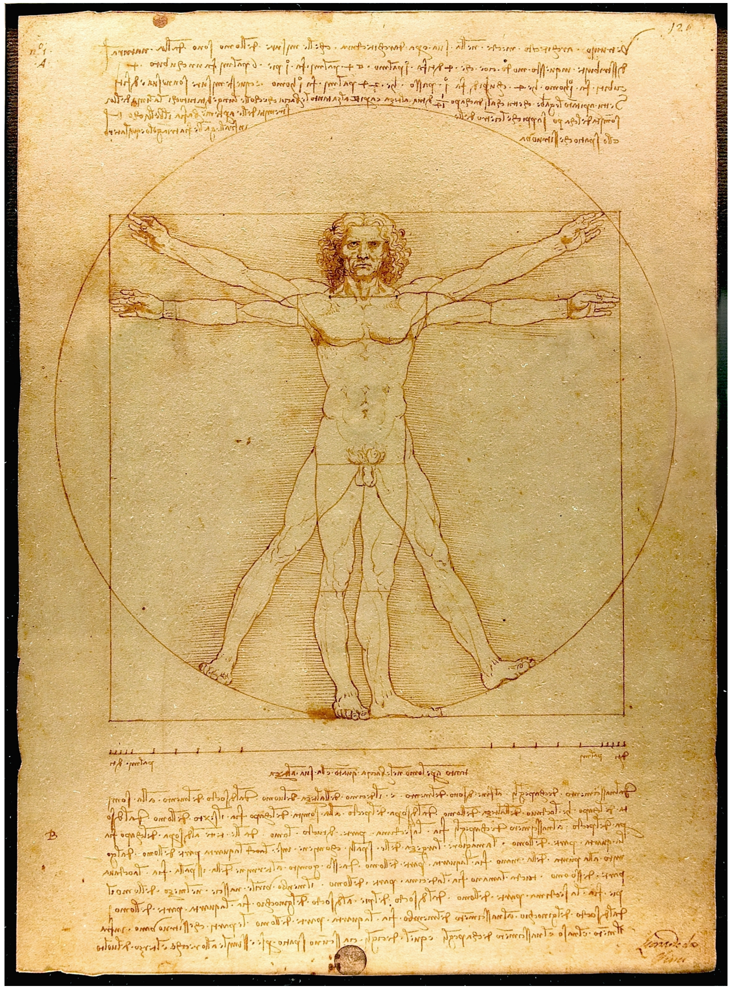
Glückwunsch

Was meint Ihr,
wo man Symmetrien
beobachten kann,
und was ist das überhaupt?



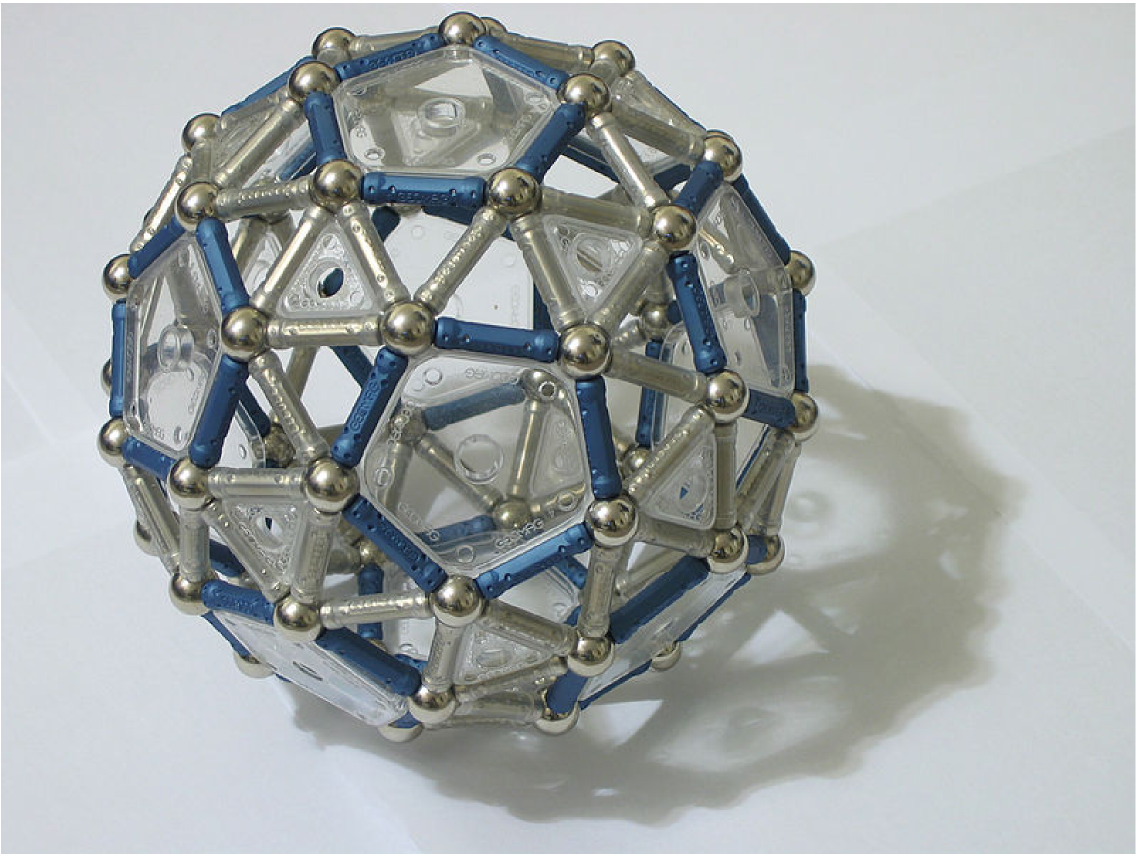
The garden front of Castle Howard in Yorkshire, England from Colen Campbell’s Vitruvius Britannicus (early 18th century).

Quelle: wikipedia.de



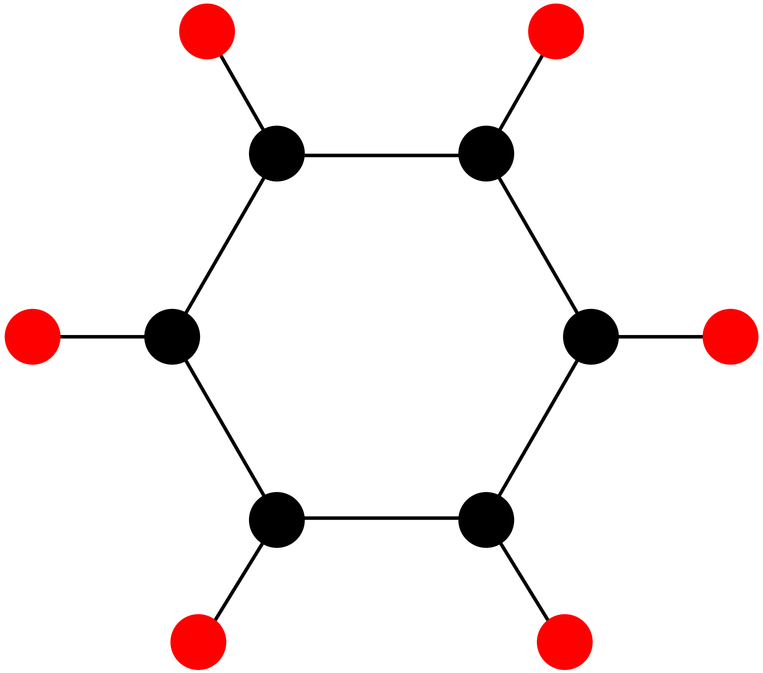
Leonardo da Vinci; Quelle: wikipedia.de

Snub-Dodekaeder



Geomag: Snub-Dodekaeder; Quelle: wikipedia.de

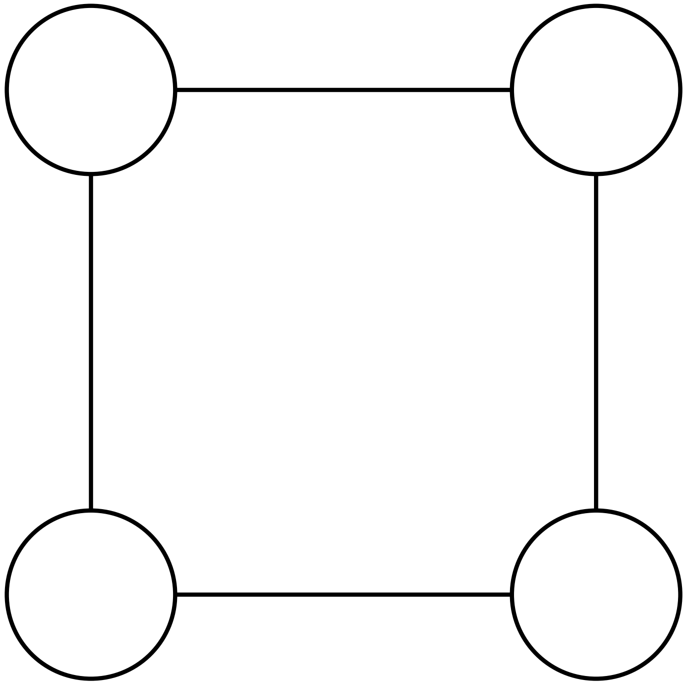
Benzol



Struktur des Benzols: schwarze Kreise = Kohlenstoff, rote Kreise = Wasserstoff

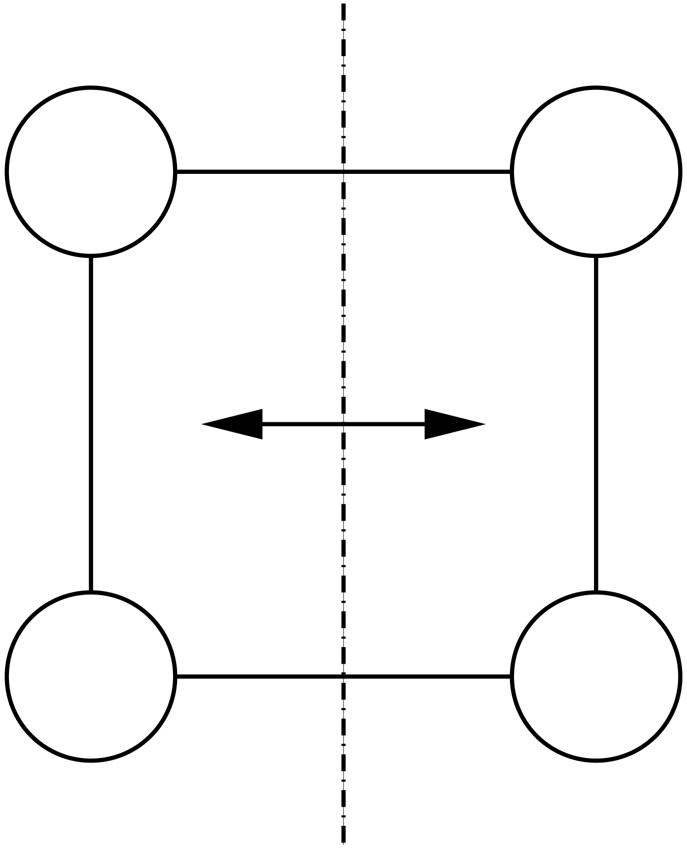
Symmetrien kann man durch Symmetrieoperationen beschreiben

Symmetrieoperationen am Quadrat



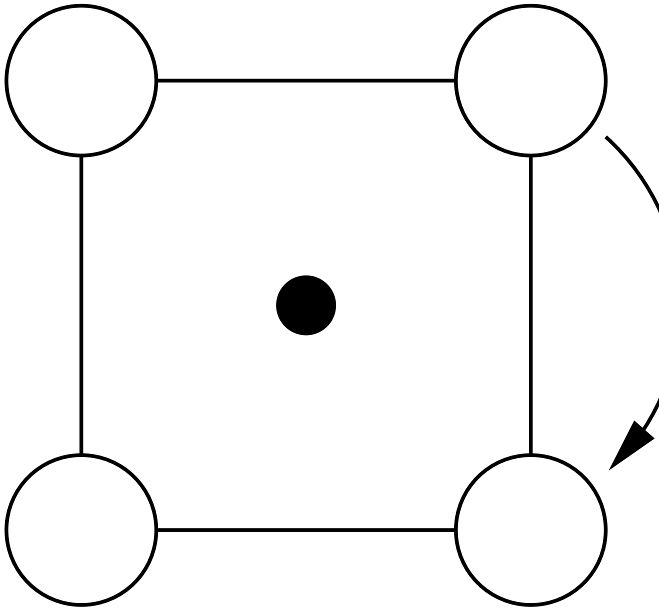
Welche Symmetrieoperationen könnte man hier ausführen?

Spiegelung



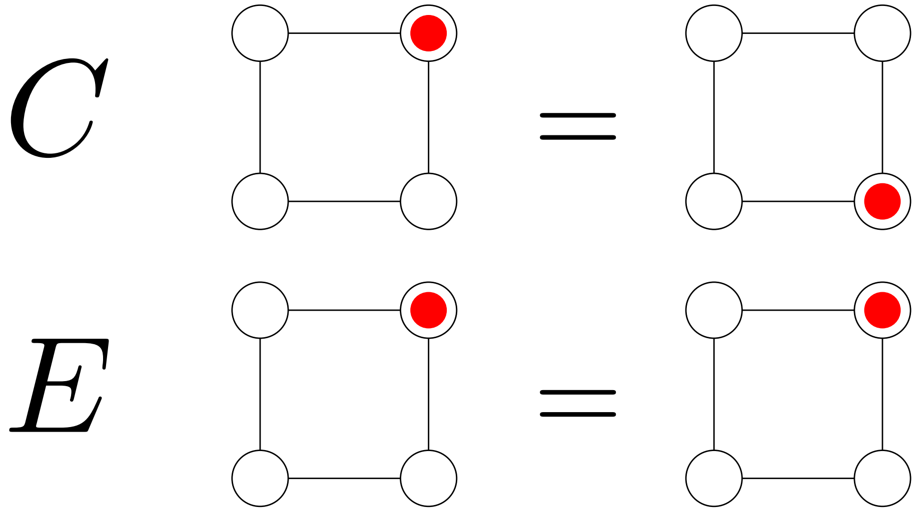
Spiegelung an einer Geraden überführt Quadrat in sich selbst.

Drehung



Drehung um 90° überführt Quadrat in sich selbst. Ebenso Drehung um . . . ?

Die Symmetriegruppe C_4



Die Drehungen des Quadrats kann man zu einer GRUPPE zusammenfassen:

$$\{E, C, C^2, C^3\}$$

Definition von Gruppen

Eine Gruppe G ist eine nichtleere Menge von Elementen g mit einer Verknüpfung $\cdot$, für die gilt:

1. Für zwei beliebige Elemente g_1 und g_2 aus G existiert ein drittes Element g_3 aus G, so dass

$$g_3 = g_1 \cdot g_2 \; .$$

2. Es existiert ein neutrales Element e in G, so dass für alle Elemente g aus G gilt:

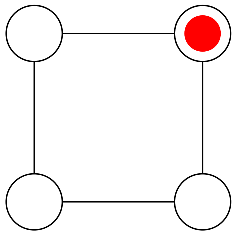
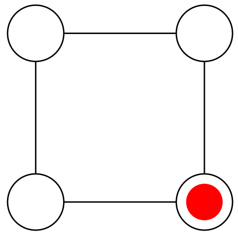
$$e \cdot g = g \cdot e = g \; .$$

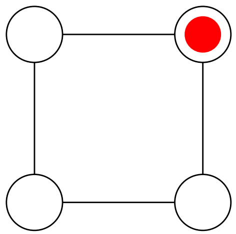
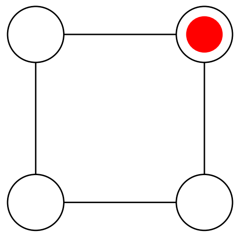
3. Zu jedem Element g existiert ein inverses Element g^{-1}, so dass gilt:

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e \; .$$

Diese Mathematiker!!!

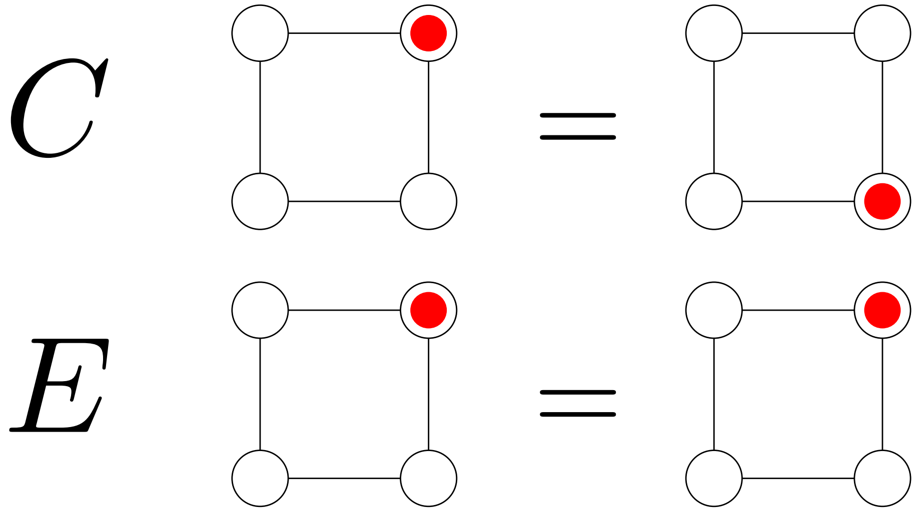
Die Symmetriegruppe C_4

C  $=$ 

E  $=$ 

$\{E, C, C^2, C^3\}$: nichtleer? $\surd$

Die Symmetriegruppe C_4

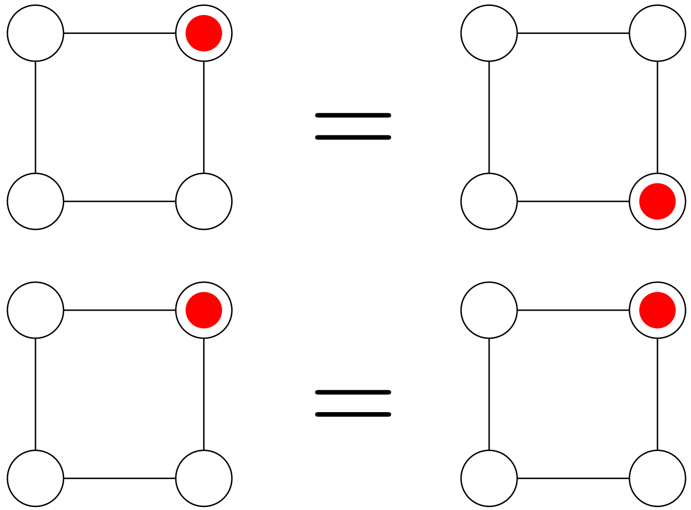


$\{E, C, C^2, C^3\}$: $g_3 = g_1 \cdot g_2$?

Die Symmetriegruppe C_4

C

E

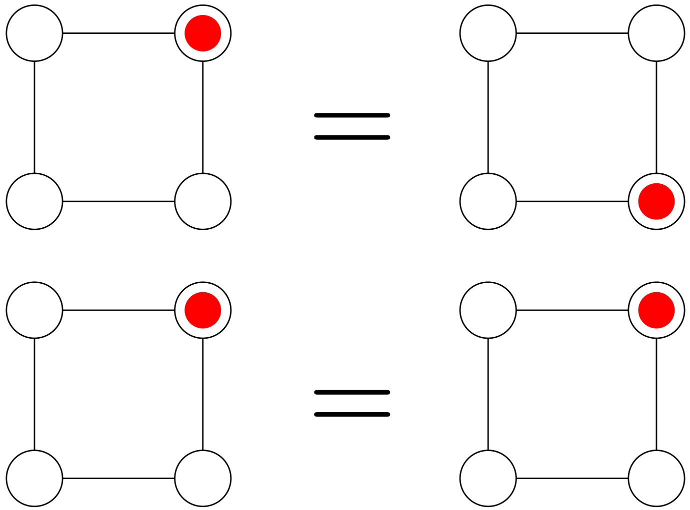


$\{E, C, C^2, C^3\}$: $e \cdot g = g \cdot e = g$?

Die Symmetriegruppe C_4

C

E

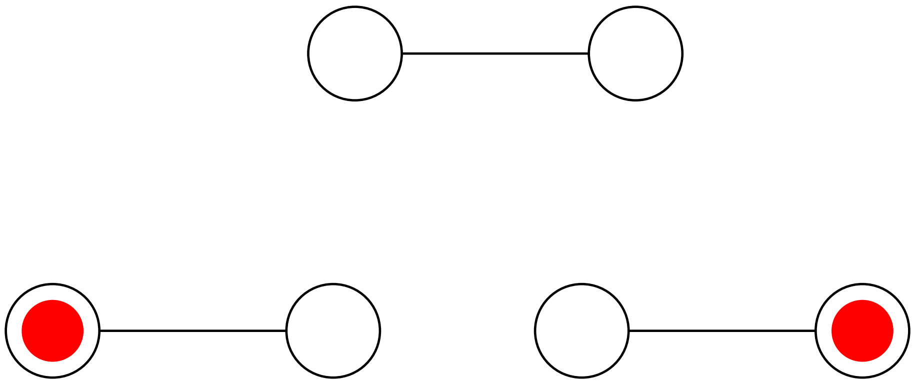


$\{E, C, C^2, C^3\}$: $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$?

Und was kann man jetzt damit machen?

Zum Beispiel einfache Quantenmechanik: Das H_2^+–Ion

H_2^+



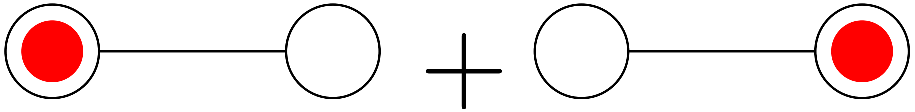
Das arme Elektron!

Es könnte links oder rechts sein, aber es möchte symmetrisch sein!

Schaffen wir das?

(Zwei Töpfe und ein Tennisball.)

H_2^+

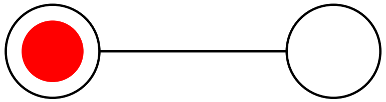
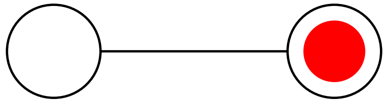
$\Psi =$ 

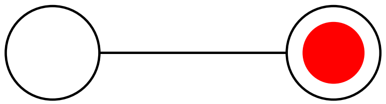
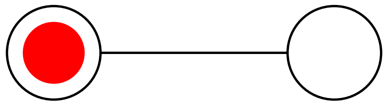
$V\Psi = ?$

$\{E, V\}$:

$V =$ Vertauschung von links und rechts

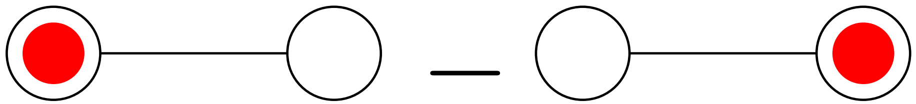
$\mathbf{H}_2^+$

$\Psi =$  $+$ 

$V\Psi =$  $+$ 

$$V\Psi = \Psi \quad \surd$$

$\mathbf{H}_2^+$

$\Phi =$ 

$V\Phi = ?$

$\{E, V\}$:

$V =$ Vertauschung von links und rechts

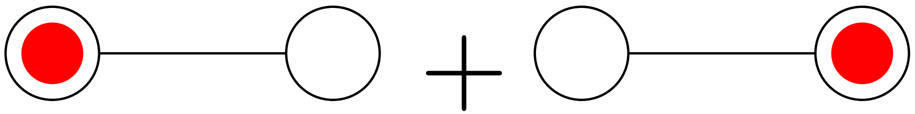
$\mathbf{H}_2^+$

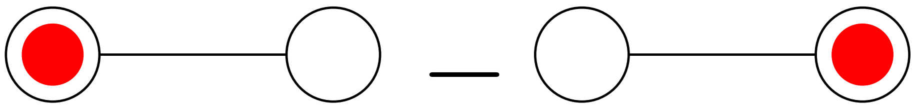
$\Phi =$ 

$V\Phi =$ 

$$V\Phi = -\Phi \quad \surd$$

H_2^+

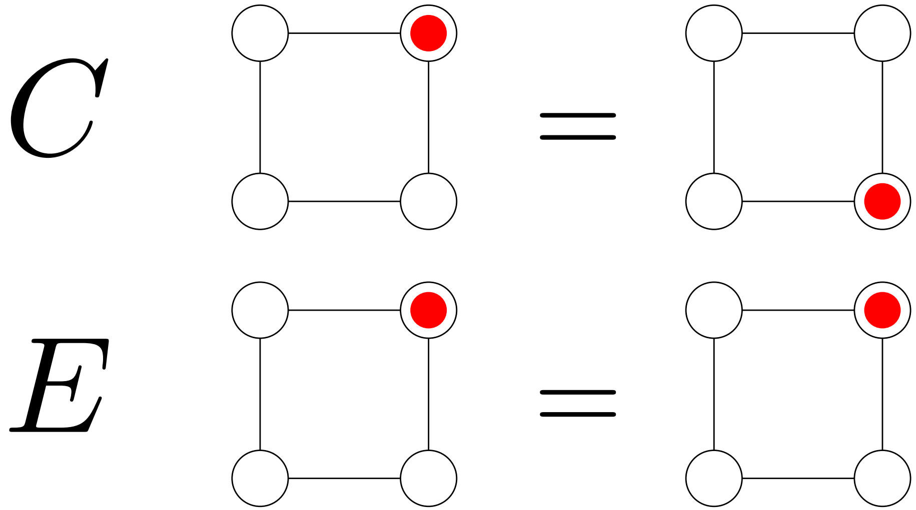
$\Psi =$  $V\Psi = +\Psi$

$\Phi =$  $V\Phi = -\Phi$

Die beiden Vorfaktoren, $+1$ und -1, stammen aus folgender Gleichung

$$V^2 = E \equiv 1, \text{ aha, } x^2 = 1$$

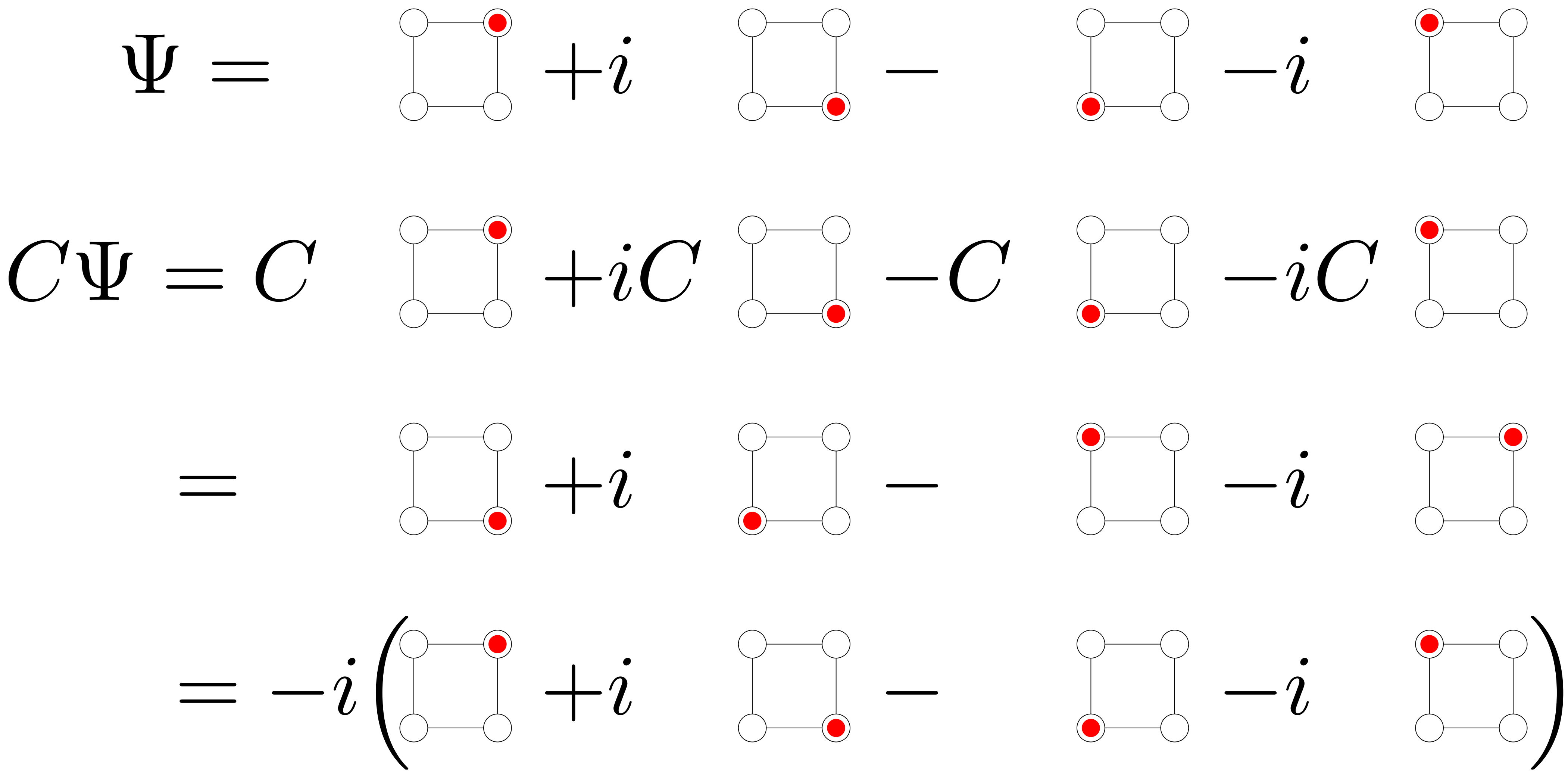
Symmetrische Konfigurationen auf dem Quadrat



$C^4 = E = 1$, d.h., $x^4 = 1$?

Vier Lösungen: . . . ?

Symmetrische Konfigurationen auf dem Quadrat



Die moderne Physik ist über Symmetrien formuliert!

Homogenität der Zeit

Wenn ein jetzt festgelegtes Zeitintervall, z.B. eine Sekunde, auch früher gleich lang war oder später gleich lang sein wird, folgt

Energieerhaltung.

TCP

Bleiben unsere physikalischen Gesetze gleich unter:

Zeitumkehr T

Ladungsumkehr C

Parität P ?

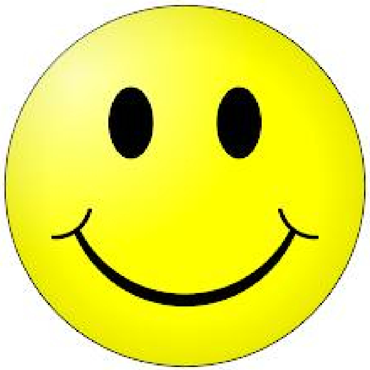
Ihr könnt es herausfinden!

Denn Ihr mögt Mathematik!

Damit könnt Ihr Vieles studieren,

z.B.

Physik!



Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit