Universität Bielefeld	Rechenmethoden der Physik	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	SS 2017	jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 16

Bitte auf den abzugebenden Lösungen den eigenen Namen und den des Tutors bzw. der Tutorin angeben.
Abgabe: 24. Juli 2017 früh in RdP oder in E5-108. Nicht später!

16.1 Diskrete Fouriertransformation

a. Wie lauten die N-ten Einheitswurzeln als Formel?

b. In der Vorlesung wurde die Transformation von Plätzen $\mid n\,\rangle$ auf symmetrische Funktionen (Zustände/Kombinationen von Plätzen) $\mid k\,\rangle$ behandelt:

$$\mid k\,\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left[i\frac{2\pi kn}{N}\right]\mid n\,\rangle\ , \qquad k=0,1,\dots,N-1\ . \tag{1}$$

Schreiben Sie für $N=3$ die drei Funktionen $\mid k\,\rangle$ explizit (ohne Summenzeichen) auf.

c. Untersuchen Sie für die drei Funktionen $\mid k\,\rangle, k=0,1,2$, dass sie Eigenzustände zur Operation C_3 (Drehung um 1/3, d.h. alles einen Platz weiter) sind. Verwenden Sie, dass $C_3\mid n\,\rangle = \mid n+1\,\rangle, 3\equiv 0$.

d. Begründen Sie für beliebige N, dass

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left[i\frac{2\pi(k-l)n}{N}\right] \;=\; \delta_{kl}\ . \tag{2}$$

Falls Sie das nur für $N=3$ begründen können, gibt es hier die halbe Punktzahl.

e. Führen Sie die diskrete Fouriertransformation

$$G_k \;=\; \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left[-i\frac{2\pi kn}{N}\right]g_n \tag{3}$$

für $\{1,0,1,0\}$ durch.

16.2 Gradient in krummlinigen Koordinaten

a. Schauen Sie sich die Herleitung des Gradienten in krummlinigen Koordinaten im Buch von Lang und Pucker an (Kap. 8.2). Schreiben Sie den Differentialoperator im krummlinigen Orthonormalsystem auf.

b. Einige Seiten später findet sich der Gradient in Kugelkoordinaten. Wie lautet er?

c. Berechnen Sie in Kugelkoordinaten den Gradienten eines $1/r$-Potentials.

16.3 Zusatzaufgabe: Fouriertransformation der Gauß-Funktion

Berechnen Sie die (symmetrische) Fouriertransformation von

$$g(x) \quad = \quad \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{a}\right] \ . \tag{4}$$

16.4 Zusatzaufgabe: Fourierreihe der Dreiecksfunktion

Ein sehr experimentierfreudiger Gitarrenspieler hat eine Gitarrenseite über dem Intervall $[0, 2]$ in Form eines gleichschenkligen Dreiecks ausgelenkt, so dass die Mitte der Seite jetzt bei $x = 1, y = 1$ die Spitze des Dreiecks bildet.
Berechnen Sie zu dieser Funktion die Fourierreihe.

. . . und viel Erfolg in der Analysis-Klausur!