Universität Bielefeld	Rechenmethoden der Physik	Prof. Dr. Jürgen Schnack
Fakultät für Physik	SS 2017	jschnack@uni-bielefeld.de

Aufgabenblatt 15

Bitte auf den abzugebenden Lösungen den eigenen Namen und den des Tutors bzw. der Tutorin angeben.
Abgabe: 17. Juli 2017 früh in RdP oder in E5-108. Nicht später!

15.1 Inhomogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Gegeben sei folgende Differentialgleichung

$$y'' + y' - 6y = f(x) \; . \qquad (1)$$

a. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen DGL. Geben Sie das Fundamentalsystem an.

b. Bestimmen Sie die partikuläre Lösung für

$$f(x) = e^{2x} \; . \qquad (2)$$

c. Bestimmen Sie die partikuläre Lösung für

$$f(x) = -6x^2 \; . \qquad (3)$$

d. Bestimmen Sie die partikuläre Lösung für

$$f(x) = 13\sin(2x) \; . \qquad (4)$$

15.2 Wronski-Determinante

Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen linear unabhängig sind:

$$e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx} \; . \qquad (5)$$

15.3 Fadenpendel

Wiederholen Sie (für sich) mit Hilfe der Vorlesung, wie man die Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0 \tag{6}$$

löst.
Stellen Sie das vollständige elliptische Integral erster Art graphisch dar. In Mathematica heißt die Funktion `EllipticK`.
Wie verhält sich die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels, das um 90° aus der Ruhelage ausgelenkt wird, zur Schwingungsdauer bei verschwindender Auslenkung? Berechnen Sie die Zahl numerisch mit Mathematica oder Wolfram Alpha.

15.4 Zusatzaufgabe: Divergenz und Rotation in Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten lässt sich ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ durch die Einheitsvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\phi$ ausdrücken: $\vec{F} = F_r\vec{e}_r + F_\vartheta\vec{e}_\vartheta + F_\phi\vec{e}_\phi$. Dabei gilt $F_u = \vec{e}_u \cdot \vec{F}$.
Mit Hilfe der Vorlesung über krummlinige Koordinaten könnte man folgende Relationen ableiten:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta F_\vartheta\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \phi} F_\phi \ . \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} = & \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta F_\phi\right) - \frac{\partial}{\partial \phi} F_\vartheta\right]\vec{e}_r \\ & + \left[\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \phi} F_r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r F_\phi\right)\right]\vec{e}_\vartheta \\ & + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r F_\vartheta\right) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} F_r\right]\vec{e}_\phi \ . \end{aligned} \tag{8}$$

Berechnen Sie unter Nutzung dieser Relationen folgende Ausdrücke

a. $\nabla \cdot \vec{e}_r$

b. $\nabla \cdot \vec{e}_\vartheta$

c. $\nabla \times \vec{e}_r$

d. $\nabla \times \vec{e}_\vartheta$

e. $\nabla \times (r\vec{e}_\vartheta)$